

## 地理加权回归模型方法与研究新进展\*

范巧<sup>1,2</sup> 郭爱君<sup>1\*\*</sup>

- (1. 兰州大学 经济学院, 甘肃 兰州 730000;
2. 重庆科技学院 法政与经贸学院, 重庆 401331)

**摘要:** 地理加权回归模型是现代空间计量经济学中局部分析的一种重要方法。本文基于文献述评的方式, 从空间权重矩阵的设定、参数估计、多重共线性的识别与消除、参数在时空上一致性的假设检验、模型稳健性分析与预测等方面阐释了地理加权回归模型的基本建模范式; 并从解释变量及其参数调整、被解释变量的不同数据特征、空间权重的不同设定、参数估计及模型选择方法调整等四个维度对地理加权回归模型方法的研究新进展进行了系统的梳理和解析; 还从时空地理加权回归模型的创新推进、地理加权回归模型族的一般化检验与优选、地理加权回归模型与空间计量全局模型的融合建模、基于 MATLAB 的代码标准化平台化建设等方面指出了地理加权回归模型方法的发展方向。

**关键词:** 地理加权回归模型 多尺度地理加权回归模型 时空地理加权回归模型 后向拟合法 弹性网络逻辑斯蒂回归

**中图分类号:** F11 **文献标识码:** A

**DOI:**10.16699/b.cnki.jqe.2021.02.010

---

\* [基金项目] 本文受到 2019 年度重庆市社会科学规划项目“深度融入‘一带一路’中重庆自贸区的平台能力及其形成机理研究”(2019YBJJ045)、2019 年度重庆市留学归国人员创新创业支持计划入选项目“共建‘一带一路’背景下重庆‘三农’高质量发展研究”(cx2019112) 的联合资助。

\*\* [作者简介] 范巧(1983-), 男, 重庆科技学院法政与经贸学院教授, 硕士研究生导师, 兰州大学经济学院 2018 级产业经济学博士研究生, 研究方向为区域与城市经济发展战略。郭爱君(1964-), 男, 兰州大学经济学院院长, 博士生导师, 研究方向为区域经济发展战略。

# Research Progress on Geographical Weighted Regression Models: A Perspective of Literature Reviews

Fan Qiao<sup>1,2</sup> Guo Aijun<sup>1</sup>

(1. School of Economics, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China;

2. School of Economics and Social Studies, Chongqing University of Science & Technology, Chongqing 401331, China)

**Abstract:** Geographically weighted regression (GWR) is an important method of local analysis in modern spatial econometrics. Based on literature reviews, this paper explains the basic modeling paradigm of the GWR model in perspectives of the setting of the spatial weight matrix, parameter estimation, identification and elimination of multicollinearity, hypothesis tests of parameter consistency in time and space, model robustness analysis, and prediction, etc. This paper systematically reviews the research progress of GWR from four dimensions, namely, features of explanatory variables and their parameters, data characteristics of the dependent variable, settings of the spatial weight matrix, methods of parameters estimation, and model selection. This paper also points out the directions in research, such as the innovation research of spatiotemporal GWR, the general hypothesis tests and models selection among all the possible models in the GWR family, the integrated modeling between spatial global and local models, and codes standardization and platform construction based on MATLAB.

**Keywords:** GWR Multi-Scale GWR Spatiotemporal GWR Backward Fitting Method Elastic Network Logistic Regression

## 引 言

现代空间计量分析方法主要有全局分析和局部分析两个分支,其中全局分析是在所有局部点纳入统一分析并侧重阐释空间依赖关系及其规律性特征,其模型类型包括通用嵌套空间计量模型(General Nesting Spatial Model, GNSM)及其各种退化模型(Elhorst, 2014);局部分析是在不同的局部点纳入不同的近邻点进行分析并侧重阐释空间异质性及其规律性特征,其模型类型包括地理加权回归模型(Geographically Weighted Regression, GWR)及空间滤波模型(Spatial-Filter-Based Local Regression, SFLR)。与空间滤波分析中直接基于空间权重矩阵的特征向量来过滤空间异质性因素的建模方式不同(Oshan 和 Fotheringham, 2018),地理加权回归是建立在核密度估计和加权最小二乘法基础上的一种局部回归方法,侧重于解释空间非平稳性和解释变量参数的漂移性(Brunsdon 等, 1996、1998、1999)。

地理加权回归源起于空间变参数回归(Foster 和 Gorr, 1986),主要的建模思路涵

盖两种逻辑：一是在局部点分析中基于空间带宽而纳入不同的近邻点来阐释空间异质性所形成的局部分析方法；二是在全局分析中基于随机扰动项包含异方差性和空间相关性的设定，在使用加权最小二乘法消除这种异方差性时所形成的空间异质性特征阐释方法（Páez, 2004）。相比较而言，前一种建模思路更为学界所接受。本文拟在阐释 GWR 分析中空间权重矩阵的设计、多重共线性识别与消除、参数的一致性检验、模型遴选准则、稳健性分析及预测等问题的基础上，解析地理加权回归模型的基本建模框架；同时，从考虑全局或局部解释变量是否纳入、局部变量参数的空间尺度是否可变、被解释变量数据类型为离散数据、大数据或实时更新数据，空间权重矩阵的不同设计范式，参数估计和模型遴选中不同的方法或准则等四个方面入手，阐释地理加权回归模型方法的研究新进展。本文的完成，有利于系统梳理地理加权回归方法的建模逻辑，找准其方法延展的主要方向和特征，从而为现代空间计量局部分析方法的相关研究提供借鉴和指引。

## 1 地理加权回归：基本分析范式

地理加权回归，从本质上来说，是在局部点变量之间依赖关系的规律性分析中，以一定的核函数、空间带宽和空间位置信息为依据纳入一定的近邻局部点，并以这些近邻点在全局上的依赖关系来替代局部点变量之间的依赖关系。一般来说，空间位置信息由局部点之间的距离来表征，这种距离的计算既要考虑地理上的距离，也要考虑经济规模或体量特征（Shi 等，2006），这种距离既可以是欧氏距离，也可以是更具一般性的 Minkowski 距离（Lu 等，2016）。空间带宽包括固定带宽和自适应带宽两种类型，固定带宽以固定的距离阈值为依据来确定需要纳入的近邻局部点；自适应带宽以纳入的近邻局部点个数为依据来确定各个局部点对应的可变空间带宽。核函数是将局部点之间空间位置信息转换成空间影响效应关系的函数式，这种转换需要符合地理学第一定律，GWR 分析中使用的核函数主要有 Gaussian 函数、Bisquare 函数、Triangular 函数或者 Bartlett 函数、Epanechnikov 函数、Tricube 函数（Cho 等，2010）以及 Squared Cauchy 函数（Nakaya，2001）等类型，其中前两种最为流行。

依据核函数、空间位置信息和空间带宽，可以确定空间权重矩阵。在 GWR 分析中，其空间权重矩阵一般是与纳入近邻局部点维度相同、仅主对角线上有元素且其余元素为零的行列式。空间权重矩阵反映了纳入分析框架的近邻局部点对目标分析局部点的空间影响关系强度。基于空间权重矩阵，结合参数估计的加权最小二乘法，可以实现对 GWR 模型的参数估计。GWR 模型参数估计过程中，往往会存在多重共线性，这种多重共线性可能源自局部变量之间的相关关系，也可能源自不同局部点分析中纳入相同的近邻点所形成变量之间的相关关系（Wheeler 和 Tiefelsdorf，2005）。通常，GWR 分析中的多重共线性，可以通过方差膨胀因子、条件数和局部相关系数来判断（Fotheringham 和 Oshan，2016），其中方差膨胀因子基于局部变量之间的拟合优度而构建，条件数基于 GWR 分析中空间权重矩阵与局部变量矩阵乘积的奇异值分析（SVD 分

解) 中的奇异值而构建, 局部相关系数基于局部变量之间的相关系数而构建; 当方差膨胀因子大于 10, 条件数大于 30, 或局部相关系数大于 0.9 时, 意味着 GWR 模型中存在多重共线性。GWR 分析中的多重共线性主要通过局部解释变量的逐步回归法、基于贝叶斯的广义岭回归 (Bárcena 等, 2014)、LASSO 回归以及弹性网络回归 (Comber 和 Harris, 2018) 等方法加以消除, 其中, 第一种消除方法建立在变量增减的基础上, 第二种至第四种消除方法建立在对目标函数施加一定约束条件的基础上, 其中 LASSO 回归和岭回归对目标函数施加约束的方式不太相同, 弹性网络回归则建立在 LASSO 回归和岭回归基础之上。

GWR 分析中基于空间权重矩阵和加权最小二乘法来进行局部点参数估计的做法, 事实上预设了一个假定条件, 即是 GWR 模型参数在空间 (或时间) 上具有非一致性, 即单个局部点对应的参数在不同时间或空间上有不同的取值, 这需要通过假设检验来完成。GWR 模型参数非一致性的假设检验的步骤包括: ①构建 GWR 模型参数具有一致性的原假设和非一致性的备择假设; ②基于估计过程中的相关参数 (如参数估计值和随机扰动项残差估计值等) 构建一个或者多个二次型统计量; ③通过二阶矩或三阶矩卡方分布来逼近这些统计量的 F 分布或卡方分布 (Brunsdon 等, 1999; Leung 等, 2000); ④在原假设条件下计算统计量的值, 结合假设检验准则进行参数具有一致性的检验。当且仅当拒绝参数在空间 (或时间) 上具有一致性的原假设时, 才可以用 GWR 模型来阐释变量之间空间关系及其规律性 (Mei 等, 2004)。

值得注意的是, 在 GWR 模型参数的假设检验过程中, 容易遭受局部点联合检验时的显著性水平设定陷阱, 需要对 GWR 分析中的显著性水平进行专门调整, 主要的调整

方法包括  $\tilde{\alpha}_1 = \frac{\xi_m}{1 + P_e - P_e/n (k + 1)}$  (Byrne 等, 2009) 以及  $\tilde{\alpha}_2 = \frac{\xi_m}{P_e / (k + 1)}$  (Fotheringham 和 Oshan, 2016) 等两种, 其中  $\tilde{\alpha}_1$ 、 $\tilde{\alpha}_2$  表示调整后的显著性水平,  $\xi_m$  指整体误差比率,  $n$ 、 $k$  分别为 GWR 模型检验中的样本个数和解释变量个数,  $P_e = 2\text{tr}(\mathbf{S}) - \text{tr}(\mathbf{S}'\mathbf{S})$ ,  $\mathbf{S}$  为帽子矩阵。相比较而言, 后一种调整更为科学, 毕竟在  $P_e = k + 1$  时,  $\tilde{\alpha}_2$  和  $\xi_m$  等价 (Silva 和 Fotheringham, 2016)。

GWR 分析中, 空间位置信息转化成距离的不同方式、不同的核函数或者不同的空间带宽, 意味着在同一组自变量和因变量条件下 GWR 模型参数估计结果将有所不同。于是, 需要在建模过程中对 GWR 模型使用的距离计算公式、核函数和空间带宽进行遴选, 以确保估计得到的参数值与真实值之间基本吻合。从经典的 GWR 分析来看, 少有专门针对距离计算公式或核函数选择的模型遴选研究, 多数模型遴选围绕着固定或自适应带宽条件下带宽阈值 (距离或者数量) 的确定来展开。最经典的 GWR 模型遴选准则是 CV 准则, 主要基于纳入分析的近邻局部点预测值与其样本观测值之间的离差平方和最小来确定最优空间带宽和最优模型。不过, CV 准则易受到单个近邻局部点观测值大小的影响, 在存在近邻局部点观测值极端情况下, 基于 CV 准则值的模型遴选结果将不够精准。学界围绕两种思路对 CV 准则进行改善。一种是直接对 CV 准则值进行调整, 包括 CV 准则值计算前近邻局部点因变量观测值的标准化、局部点 CV 准则值的正

态化或局部点 CV 准则值标准化等 (Farber 和 Páez, 2007)。相比较而言,局部点 CV 准则标准化处理更为科学,其主要做法在于以所有带宽下局部点 CV 值的和的倒数,或者以所有带宽下局部点 CV 值的特定向下累积值(如前 10%)的倒数作为权重来对 CV 准则值进行加权处理。另一种是在 CV 准则的构建理念基础上,重新加入其他可靠的评估因素,如在预测值与观测值基础上增加解释变量个数和样本容量信息,形成 AIC、AICc 等准则;或者在基于贝叶斯的分析中加入后验概率信息形成 BIC 和 SBIC 等准则 (Cleveland 和 Devlin, 1988; Nakaya, 2001)。目前, GWR 模型选择的方法仍以 CV 准则或 AICc 准则为主。

与经典的回归分析类似,在 GWR 模型遴选过后,需要对其进行稳健性评估。主要的 GWR 稳健性评估方法包括删掉全局回归过程中残差值大于 3 的部分样本后重新进行 GWR 分析、对初始残差较大的部分样本进行向下加权后重新进行 GWR 分析等 (Fotheringham 等, 2002)。不过,这两种处理方法均存在一定的主观性,其直接的后果是临界值 3 的选择决定删除样本量的多少,而所选择的向下加权函数形式也会决定数据调整的幅度,这两种主观性做法均将导致 GWR 稳健性分析精度降低。由此, Harris 等 (2010) 建议将标准化后的全局残差和标准化后的局部残差作为样本删除的临界值,这在一定程度上可以提高 GWR 稳健性分析的精度,毕竟标准化后的残差相比 3 而言,其临界值具有一定的客观性和科学性。预测问题是回归分析方法中的一个重要环节,不过目前学术界对 GWR 模型预测问题的研究文献较少,仅 Imran 等 (2015) 结合克里金插值法,对 GWR 模型预测问题进行了初步探索,主要做法在于从局部变量及其参数估计值、随机扰动项估计值等出发对局部点的被解释变量进行预测,其随机扰动项的估计值主要在 GWR 随机扰动项方差估计值上嵌入 KED 克里金插值方法来计算。这种 GWR 预测方法相比较直接进行点估计而言有所改进,然而,这种做法并未考虑随机扰动项的分布特征,从而使基于点估计和随机扰动项估计的预测精度大大降低。

## 2 适应解释变量及其参数属性调整的 地理加权回归新进展

地理加权回归模型的基本设定中,一般有解释变量及参数、被解释变量、随机扰动项的分布设定以及空间权重矩阵等要件。地理加权回归模型方法源起和发展的 30 多年来,学界始终不遗余力推动其创新发展。接下来,本文拟首先从局部分析中是否纳入全局变量、局部分析中局部变量对应的空间尺度是否变化等入手,来梳理地理加权回归模型研究的新进展。

在地理加权回归模型的经典范式中,解释变量往往是局部的,即解释变量对被解释变量的影响是可变的,与纳入分析框架的近邻局部点的空间位置信息相关。然而,这与经济社会发展的现实并不完全匹配,毕竟纳入分析框架的近邻局部点对目标分析局部点的影响既可能有与空间位置信息相关的可变部分,也可能存在与空间位置信息无关的恒定部分,也即是说在 GWR 分析的同一模型中,可能既存在局部解释变量,也

存在全局解释变量。在仅包含局部解释变量的 GWR 模型中加入全局解释变量所形成的 GWR 模型,被定义为半参数地理加权回归模型 (Semi-Parameter Geographically Weighted Regression, SPGWR)。由于半参数地理加权回归模型混合使用了局部解释变量和全局解释变量,这种模型也被称作混合地理加权回归模型 (Mixed GWR)。由于半参数地理加权回归模型实际上涵盖了全局分析和局部分析两个部分,对半参数地理加权回归模型的参数估计过程往往需要先着重处理一种分析然后再处理另一种分析,由此,其算法过程也包括从全局到局部分析、从局部到全局分析两种。由于半参数地理加权回归模型的参数估计需要经历两个阶段的分析才能完成,这种估计方法通常被称为两步法或者两阶段方法。相比较而言,两种算法的步骤均包括局部分析—全局分析—局部分析,但前者侧重于在局部残差分解的基础上进行全局回归,然后将结果代入局部分析中,更强调从局部到全局分析的核心逻辑 (Fotheringham 等, 2002); 后者则基于幂等矩阵估算全局变量的参数再将参数代入局部分析中,更强调从全局到局部分析的核心逻辑。由于这两种算法的核心逻辑并不相同,意味着基于这两种算法得到的参数估计结果相应地会存在差异 (Kang 和 Dall' erba, 2016)。

无论是地理加权回归的经典范式,还是半参数地理加权回归,其建模过程中对所有局部解释变量均纳入了同样的空间带宽尺度,即在模型的局部分析部分,对所有的局部变量给予了统一的空间带宽。这同样可能与经济社会发展现实不符,毕竟某些局部解释变量可能对被解释变量产生影响的空间范围更大一些,需要设定更大的自适应空间带宽;相应地,某些局部解释变量可能对被解释变量产生空间影响的范围要小一些,则需要将自适应空间带宽设定得更小一些,以充分且真实地反映局部解释变量对被解释变量的空间影响。有鉴于此,需要在建模过程中放宽对局部分析中所有局部变量空间带宽一致的基本假定,于是多尺度地理加权回归模型 (Multiscale Geographically Weighted Regression, MGWR) 和多尺度半参数地理加权回归模型 (Multi-Scale Semi-Parameter Geographically Weighted Regression, MSPGWR) 应运而生。

在地理加权回归模型的经典范式中放宽空间带宽尺度一致性假定,可以产生多尺度地理加权回归模型;在半参数地理加权回归模型中放宽空间带宽尺度一致性假定,可以产生多尺度半参数地理加权回归模型。Fotheringham 等 (2017) 在强调不同的局部解释变量对被解释变量影响具有不同的空间尺度基础上,架构了多尺度地理加权回归模型的分析范式,并基于线性可加模型和后向拟合法,探讨了多尺度地理加权回归模型的参数估计问题。Yu 等 (2020) 从参数估计的基本表达式及协变量特异性分解两种方式入手,探讨了地理加权回归经典模型和多尺度地理加权回归模型的参数估计偏差问题,指出多尺度地理加权回归模型的参数估计偏误相对较小,从而更具优势。多尺度半参数地理加权回归模型是多尺度地理加权回归模型和半参数地理加权回归模型的糅合,是在半参数地理加权回归模型中放宽了局部变量空间带宽尺度一致性假设的局部回归分析 (Chen 和 Mei, 2020)。对多尺度半参数地理加权回归模型的估计,需要以半参数地理加权回归模型的两阶段参数估计结果为初始迭代值,然后利用广义线性可加模型和后向拟合法进行迭代,以求解其模型参数并进行局部变量的多尺度空间带宽

遴选。值得指出的是, 尽管 Fotheringham 等 (2017) 以及 Chen 和 Mei (2020) 的研究都利用了线性可加模型和后向拟合法, 但二者仍有较为明显的区别, 表现在如下五个方面。①二者的模型形式针对性不同。前者侧重于多尺度地理加权回归模型, 后者将之延展至多尺度半参数地理加权回归模型。②二者的迭代方式不同。在每一轮迭代中, 前者需要更新每一轮迭代中前一个局部变量及其参数估计值, 而后者仅需更新上一轮迭代中的局部变量及其参数估计值。③二者对停止迭代准则的考察依据不同。前者基于残差平方和或者线性可加项来建立停止迭代的判定准则, 后者则基于参数估计值来建立停止迭代的判定准则。④二者的平滑因子估计方式不同。尽管二者均将平滑因子 (单个局部变量及其参数的乘积) 作为参数估计和迭代的重要方式, 然而前者侧重对整个平滑因子的估计, 后者则侧重对平滑因子中单个局部变量参数进行估计。⑤二者的被解释变量构建方式不同。前者基于上一轮迭代中单个平滑因子的估计值加上模型的整体残差来构建新的被解释变量; 后者则基于上一轮迭代中的被解释变量减去上一轮迭代中全局变量及参数估计值的乘积, 再减去上一轮迭代中其他局部变量及其参数估计值的乘积来构造新的被解释变量。

无论是半参数地理加权回归模型, 还是多尺度地理加权回归模型, 还是多尺度半参数地理加权回归模型, 都是从模型解释变量及其参数属性入手, 是对地理加权回归模型的重要延展, 这些模型均强调对地理加权回归模型本身设定形式进行一定程度的修订。对模型解释变量及其参数属性相关的地理加权回归模型的延展, 还包括地理加权主成分分析的引入 (Harris 等, 2011)。地理加权主成分分析的核心步骤包括以下三个方面: ①基于地理加权回归模型所确定的空间权重矩阵  $W_{(i)}$ , 构建局部点解释变量的相关系数矩阵  $X^T W_{(i)} X$ , 其中  $W_{(i)}$  为局部点  $i$  的空间权重矩阵,  $X$  为局部点  $i$  分析中的解释变量矩阵; ②确定相关系数矩阵的特征值和特征向量矩阵, 以特征值矩阵中主对角线元素占所有主对角线元素和的比例作为变量的方差贡献率, 并以方差贡献率和超过 85% 的变量作为主成分; ③依据局部点各个主成分变量序列、主成分变量所对应特征向量、主成分变量对应的方差比例等来计算局部点的最终得分值。从本质上来说, 地理加权主成分分析方法是地理加权回归和主成分分析的结合, 尽管其并不对地理加权回归模型本身做出重大修订, 但从其建模范式来看, 仍是基于解释变量及其参数属性调整的地理加权回归模型族研究的重要推进。

### 3 考虑被解释变量不同数据特征的地理加权回归新进展

相比考虑解释变量及其参数属性变化的地理加权回归模型延展而言, 基于被解释变量不同数据特征考察的地理加权回归模型延展要更为丰富一些。从被解释变量的数据特性来看, 主要包括被解释变量数据为离散数据时的方法延展、被解释变量数据为函数型数据时的方法延展、被解释变量数据为高频大数据时的方法延展、被解释变量数据缺乏时的方法延展等。

地理加权回归模型的经典范式中, 被解释变量往往是连续数据, 其随机扰动项的

分布特征也往往设定为零均值、同方差的正态分布。当被解释变量为离散型数据时,需要采用新的模型及分析范式。一般来说,贝努里离散选择数据是最为典型的离散数据。Atkinson 等(2003)针对被解释变量为0-1型离散选择数据的情况,在地理加权回归中引入了逻辑斯蒂回归,架设了地理加权逻辑斯蒂回归的分析范式(Geographically Weighted Logistic Regression, GWLR),然而,该文并未给出地理加权逻辑斯蒂回归建模过程的数学原理及相关公式。分类数据也是一种典型的离散数据。Brunsdon 等(2007)针对被解释变量为分类数据的情形,结合线性判别式回归(Linear Discriminant Analysis, LDA)以及二次型判别式回归(Quadratic Discriminant Analysis, QDA),架构了地理加权判别式回归(Geographically Weighted Discriminant Regression, GWDR)的分析范式,其本质在于基于双平方核函数及极大似然估计,对局部点分属不同类型的均值、方差和出现概率进行估计,并基于似然值来进行模型遴选和自适应带宽的优选。

单位空间内事件发生的次数,也是一种典型的离散数据。当地理加权回归模型的被解释变量为单位空间内事件发生的次数时,地理加权回归模型将转化为地理加权泊松回归模型(Geographically Weighted Poisson Regression, GWPR),该种模型的本质特征在于随机扰动项的分布由经典的正态分布调整成为泊松分布(Shariat-Mohaymany 等, 2015)。地理加权泊松回归方法的形成,相比较地理加权回归模型的经典分析范式而言,晚了将近15年。Nakaya(2001)在设定随机扰动项服从泊松分布的基础上,结合经典交互模型的设定,将来源地、目的地数据及来源地至目的地的流量数据纳入解释变量范畴,建立了地理加权泊松交互模型的分析范式(Geographically Weighted Poisson Interaction Regression, GWPIR)。从本质上看, GWPIR 模型仍是一种地理加权泊松回归,只不过其解释变量纳入了目的地、来源地及其流量数据。Nakaya 等(2005)基于地理加权泊松回归模型和半参数地理加权回归模型,架设了半参数地理加权泊松回归模型的分析范式(Semi-Parameter Geographically Weighted Poisson Regression, SGWPR),其实质是在 GWR 模型中既考虑了随机扰动项服从泊松分布的基本设定,又在 GWR 分析中同时考虑了全局变量和局部变量。在地理加权回归模型族中,随机扰动项服从泊松分布的系列模型估计也通常采用极大似然估计法。

相比较被解释变量为离散选择数据的地理加权回归模型延展而言,基于被解释变量为函数型数据、实时更新数据和大数据或数据短缺情形的地理加权回归模型延展要相对少一些。所谓函数型数据,是指随着时间、空间等连续集而变化的轨迹数据,包括曲线、平面、三维图像等。Romano 等(2020)结合被解释变量为函数型数据的情形,在设定随机扰动项方差具有异方差性的条件下,构建了专门针对函数型数据的异方差函数型地理加权回归模型(Heteroskedastic Geographically Weighted Regression, HGWR)。高频大数据同时兼有大数据和实时更新数据的特征, Tasyurek 和 Celik(2020)针对被解释变量为大数据和实时更新数据的情形,建立了可逆近邻搜索地理加权回归模型的分析范式(Reverse Nearest Neighbor GWR, RNN-GWR),其核心逻辑在于通过对参数估计或模型遴选过程中部分矩阵的预先计算、存储和简化,来降低大数据和数据实时更新条件下建模复杂性及数据存储量。其中,需要预先计算和简化的相关矩阵包括:



①用解释变量与空间权重矩阵的主对角线元素形成的新向量的乘积( $[X \times w_{(i)}^T]^T$ )来替代解释变量与空间权重矩阵的乘积 $X^T W_{(i)}$ ; ②在计算和存储 $[X^T W_{(i)} X]^{-1}$ 时仅需计算下三角矩阵元素然后利用矩阵的对称性质求解所有元素; ③针对实时更新的数据, 仅需搜索更新数据的局部点, 结合近邻的逆向搜索, 找准受数据更新影响的局部点并对这些点进行参数估计的实时更新。数据短缺是进行实证分析时往往会遇到的一个关键问题, 如何在数据短缺的情况下科学地进行局部回归并估算局部点相关参数, 是现代空间计量经济学局部分析迫切需要解决的一个重要难题。Murakami 和 Tsutsumi (2015) 针对微观数据缺乏的现实, 将微观空间单元数据加总成为面域空间单元数据的转换矩阵以及表征微观空间单元之间空间溢出效应关系的空间权重矩阵相结合, 建立了基于面域空间数据的微观空间单元地理加权回归模型 (Area To Point GWR, ATP-GWR) 的分析范式, 其核心逻辑在于将面域空间单元分解为微观空间单元的空间、人口等已知信息, 在其他微观数据缺乏的情况下, 基于面域空间单元数据来估计微观空间单元的局部变量参数, 从而解决 MAUP (The Modifiable Areal Unit Problem)。

## 4 基于空间权重矩阵不同设定的地理加权回归新进展

空间权重矩阵设定是现代空间计量经济学区别于传统计量经济学的重要标志, 也是地理加权回归模型建模中最重要的一环。空间权重矩阵设定的重要性, 带来该领域研究的成熟性。基于空间权重矩阵的不同设定, 对地理加权回归模型方法的延展主要集中在如何在空间权重矩阵的设计中考虑时间因素或其他因素, 并在此基础上架构时空地理加权回归模型或其他演绎模型等。

时空地理加权回归模型 (Geographically and Temporally Weighted Regression, GWTR) 源于 Huang 等 (2010) 的研究, 其主要建模思路是在将非平衡面板数据堆积为截面数据的基础上, 以高斯核函数和欧氏距离为基础来设计空间权重矩阵, 并在核函数中嵌入了时间间隔距离而形成时空权重矩阵, 随后按照地理加权回归模型的经典建模范式进行模型的参数估计与模型遴选等。事实上, 这种时空地理加权回归模型建模方式具有较为明显的缺点, 包括核函数限于高斯函数而不具有可选择性、对面板数据的大截面化数据处理、时间权重矩阵中仅考虑时间间隔而未能考虑空间溢出效应在时间上的滞后和转移、传导效应等。对这些不足, 学术界进行了一定的修正, He 和 Huang (2018) 在时间权重矩阵设计中用 Cosine 距离替代了欧氏距离; Harris 等 (2013) 将时空权重矩阵中的时间因素替换为情景变量, 并在此基础上架构了情景地理加权回归模型 (Contextualized Geographically Weighted Regression, CGWR) 的分析范式; Du 等 (2018) 将时空距离分解成了空间距离、季节性时间距离、非季节性时间距离, 并在此基础上架构了季节性时空地理加权回归模型 (Geographically and Cycle-Temporally Weighted Regression, GCTWR) 和季节性时间地理加权回归模型 (Cycle-Temporally Weighted Regression, CTWR) 的分析范式。

作为地理加权回归模型的重要创始人和重要推动者, Fotheringham 等 (2015) 也对

时空地理加权回归模型进行了重要的延展,他们在高斯核函数基础上,基于不变的时间带宽和可变的空间带宽,构造了时空权重矩阵;并在固定时间带宽条件下结合 CV 准则对各时间周期上的空间权重矩阵进行了优选,随后在优选出来的空间权重矩阵基础上结合 CV 准则对时间权重矩阵进行优选。Fotheringham 等(2015)对时空地理加权回归模型的重要推动在于在时空权重矩阵架构中考虑了不同时间周期上空间权重矩阵的可变性。然而,其建模过程仍存在如下几个方面的不足:①考虑面域空间单元的内在结构稳定性,这种空间权重矩阵的可变性将与现实不吻合;②时空权重矩阵一般同时受到空间权重矩阵和时间权重矩阵的影响,在固定时间权重矩阵的基础上优选空间权重矩阵或在固定空间权重矩阵基础上优选时间权重矩阵的做法,事实上割裂了时空影响效应的同时性,从而会带来设定偏误;③其时空权重矩阵中仅有主对角线上有元素,也忽略了空间溢出效应在时间上的滞后效应以及间接影响效应和传导效应;④其时空权重矩阵构建过程中,纳入分析的时间间隔超过时间带宽的做法也与带宽的设计理念不符。

基于空间权重矩阵设计方式的地理加权回归模型延展,还包括在时空权重矩阵中嵌入其他因素形成新的地理加权回归模型类型,以及在时空权重矩阵基础上对地理加权回归模型进行模型改进而形成新的地理加权回归模型类型两种方式。基于第一种思路,Bidanset 等(2018)利用空间权重矩阵、时间权重矩阵和特征权重矩阵等的组合,架构了不同类型的权重矩阵,并在此基础上形成了地理特征加权回归模型(Geographically and Characteristically Weighted Regression, GCWR)以及地理、时间和特征加权回归模型(Geographically, Temporally and Characteristically Weighted Regression, GTCWR)等分析范式。这些模型的本质就在于利用空间信息、时间信息或特征信息来构建权重矩阵,并将之嵌入地理加权回归模型的经典范式,从本质上来说这些模型仍然属于地理加权回归模型经典分析范式的范畴。基于第二种思路,Wu 等(2014)在空间自回归模型的基础上,嵌入了时空地理加权回归模型,从而建构了时空地理加权自回归模型(Geographically and Temporally Weighted Autoregressive Model, GTWAR)的分析范式。时空地理加权自回归模型是空间计量分析中全局模型和局部模型的重要融合,该模型实现了空间自回归模型和时空地理加权回归模型的互嵌,而且在时空权重矩阵设计中考虑了时间影响的滞后性,以及时间与空间距离之间的夹角关系,是地理加权回归模型方法的重要延展。不过,需要指出的是,该研究尽管在地理加权回归模型建模中嵌入了空间自回归模型形式,但其参数估计采用了两阶段最小二乘法,未能按照经典的空间自回归模型进行参数估计,也未能将涉及被解释变量的项( $W_y$ )移动到等式左边进行参数估计,而是使用了工具变量对该项进行了替代,从而参数估计结果并不够精准;同时,该文所架构的时空权重矩阵也仅考虑了时间滞后性,未能考虑空间溢出效应的间接影响效应与转移、传导效应。

## 5 基于参数估计及模型选择方法调整的地理 加权回归新进展

参数估计是实现空间局部分析的主要环节,是地理加权回归模型建模过程的关键

步骤。针对不同的地理加权回归模型类型，一般会采用不同的参数估计方法。目前，地理加权回归模型族中主流的参数估计方法包括以下四种：①针对地理加权回归模型的经典分析范式，主要采用加权最小二乘法，其核心思路在于以空间权重矩阵作为加权权重对局部点的参数进行估计；②针对半参数地理加权回归模型，主要采用两阶段估计方法，其核心思路在于按照一定的顺序，分别用最小二乘回归和地理加权回归处理全局变量和局部变量的参数估计问题，然后再将全局分析结果代入局部回归的参数估计式中；③针对多尺度地理加权回归模型或多尺度半参数地理加权回归模型，主要采用基于线性可加模型和后向拟合法进行参数估计迭代，其主要做法是以平滑因子或者局部变量参数的地理加权回归估计值作为初始值，结合后向拟合法和迭代过程，实现对平滑因子或变量参数的估计；④被解释变量为离散选择数据的地理加权回归模型类型，往往建立在极大似然估计的基础上，其主要做法是基于随机扰动项的泊松分布或者其他分布设定，找准给定样本信息条件下参数出现的对数似然函数，并结合对数似然函数关于相关参数的一阶导数等于0来求解参数估计值。

近期基于参数估计方法调整而形成的对地理加权回归模型方法延展，主要包括以下四个方向：①对不同模型的迭代算法适用性的探讨；②对地理加权回归模型中随机扰动项存在空间相关性时的参数估计方法探讨；③对局部点参数及其局部变动比率分解基础上的参数估计方法探讨；④在局部回归中嵌入除最小二乘准则或均值回归以外的其他参数估计准则或估计方法的探讨。基于第一个方向，Leong 和 Yue (2017) 结合 Jacobi 迭代方法，架构了条件地理加权回归模型 (Conditional Geographically Weighted Regression, CGWR) 的分析范式，其本质在于以单个变量的 GWR 回归作为初始值，以被解释变量减去上一轮迭代中的其他所有变量及其参数估计值的乘积作为新的被解释变量，更新单个变量的 GWR 回归系数。相比较 Gauss-Seidel 迭代需要更新本轮迭代中前一个局部解释变量参数的做法 (Brunsdon 等, 1999)，Jacobi 迭代算法仅需要更新上一轮迭代的所有局部变量参数，因而相对更简单，需要的计算量和存储量也更小。从第二个延展方向来看，在地理加权回归模型中，若其随机扰动项存在空间相关性，可以基于薄板样条插值模型 (Wang, 1998) 和自回归地理加权回归模型 (Autoregressive Geographically Weighted Regression, AGWR) (Brunsdon 等, 1998) 去修正。基于第三个方向，Wang 等 (2008) 结合局部变量参数的泰勒级数展开，将局部变量参数  $\beta_k(u_i, v_i)$ ，分解成为局部点参数  $\beta_k(u_0, v_0)$  及其在经度和纬度上的局部变动比率  $[\beta_k^{u_i}(u_0, v_0), \beta_k^{v_i}(u_0, v_0)]$ ，从而架构了局部线性拟合的地理加权回归模型 (Local Linear-Fitting-Based GWR, LLF-GWR) 的分析范式，随后结合参数估计的最小二乘法，在将局部变量进行类似的转化之后实现相关参数的估计。Wang 等 (2008) 对局部变量参数的分解很有意思，其建模过程不仅能实现对局部点参数的估计，还能实现局部点参数在经度或者纬度上的局部变化比率的估计；不过，这种分解要求对解释变量进行类似的分解，可能会导致多重共线性出现的概率和水平大大提升。

基于第四个方向对地理加权回归模型方法的延展研究要相对多一些。其中，Zhang 和 Mei (2011) 在将地理加权回归模型中的加权最小二乘法准则，调整成为局部最小绝

对偏差准则的基础上,对局部线性拟合的地理加权回归模型的参数估计问题进行了深入阐释,并在此基础上架构了稳健的 GWR 模型 (Robust GWR, RGWR) 和稳健的局部线性 GWR 模型 (Robust Local Linear GWR, RLL-GWR) 的分析范式,该文还将 CV 准则调整成为 ACV 准则用以探讨模型遴选问题。Chen 等 (2012) 放弃了地理加权回归模型中均值回归的经典做法,结合分位数回归理念,架构了地理加权分位数回归模型 (Geographically Weighted Quantile Regression, GWQR) 的分析范式,其主要做法是在地理加权回归分析中对分位数以下的数据给予了与分位数相同的权重  $\tau$ ,且对分位数以上的数据给予权重  $1 - \tau$ ,随后基于最小二乘准则或其他准则进行参数求解。Comber 和 Harris (2018) 基于弹性网络回归的基本思路,架设了地理加权弹性网络逻辑斯蒂回归模型 (Geographically Weighted Elastic Net Logistic Regression, GWENLR) 的分析范式,其主要做法是在地理加权逻辑斯蒂回归模型的参数估计过程中,其损失函数综合考虑了 LASSO 回归和岭回归的核心思想和约束条件,以破解传统地理加权逻辑斯蒂回归对变量之间关系可能的高估以及在处理多重共线性及模型选择时可能的失效等难题。

地理加权回归分析中的模型遴选是参数估计过程之后的一个重要环节,这首先体现在要否选择地理加权回归进行局部分析上,也体现在地理加权回归分析中选择何种类型和何种规模的空间带宽上,还体现在地理加权回归分析中选择何种模型进行局部分析上。按照前文的分析,对空间数据分析是选择局部模型还是选择全局模型的问题,主要通过参数在空间或时间上的一致性检验来完成;对地理加权回归分析中空间带宽的选择主要通过 CV 准则或 AICc、BIC 等准则来进行;对地理加权回归中选择何种局部模型的分析主要通过假设检验来完成。事实上,无论是对参数在空间或时间上一致性的假设检验,还是对地理加权回归模型类型选择的假设检验,都要依据模型之间的转化条件,设定原假设和备择假设,并依据模型转化过程中的参数估计值或随机扰动项方差估计值等,构建一定的二次型统计量,结合二阶矩或者三阶矩卡方分布逼近,来构造一个卡方分布或者 F 分布来拒绝或接受原假设,由此进行模型的遴选,这是地理加权回归模型选择中最为经典的方法。近期研究中,部分学者认为这种以二阶矩或三阶矩卡方分布逼近统计量分布的做法缺乏精准性,并以随机扰动项的 Bootstrap 抽样为基础,结合迭代的思想,以模型残差平方和变动比率来进行假设检验和模型遴选 (Mei 等, 2016)。其模型遴选过程中的核心步骤包括: ①进行地理加权回归分析并确定随机扰动项的残差; ②对这些扰动项的残差进行 Bootstrap 抽样,结合上一轮迭代中得到的参数估计值及局部变量来构造新的被解释变量; ③对新的被解释变量及局部解释变量进行地理加权回归分析,更新地理加权回归过程的参数估计值; ④以迭代过程中不同模型的残差平方和变动比率来构建检验统计量,并进行假设检验和模型遴选。

## 6 结论及进一步研究方向

本文基于对地理加权回归模型方法研究的主要文献进行回顾,阐释了地理加权回归模型建模的主要分析范式,并从考察解释变量及其参数调整、考虑被解释变量的不

同数据特征、考量空间权重矩阵的不同设定方式、考究参数估计及模型选择方法调整等四个方面入手，解析了地理加权回归模型方法的新进展，如图 1 所示。从全文的分析来看，包含了如下几个方面的重要结论：①现代空间计量经济学主要分为全局回归方法和局部回归方法两类，其中局部回归方法主要包括空间滤波模型和地理加权回归模型；②地理加权回归模型的基本分析范式包括空间权重矩阵的设定、参数估计、多重共线性的识别与消除、参数在时空上一致性的假设检验、模型稳健性分析与预测等；③目前对地理加权回归模型的延展包括很多维度，主要的延展可以从解释变量及其参数调整方式、被解释变量的数据特性、空间权重矩阵的不同设定、参数估计及模型选择的不同方法等维度进行系统的整理；④目前，对多尺度地理加权回归模型、多尺度半参数地理加权回归模型的建模范式架构，以及对时空地理加权回归模型的建模范式架构等问题的研究，是地理加权回归模型族研究中较为前沿的研究话题。

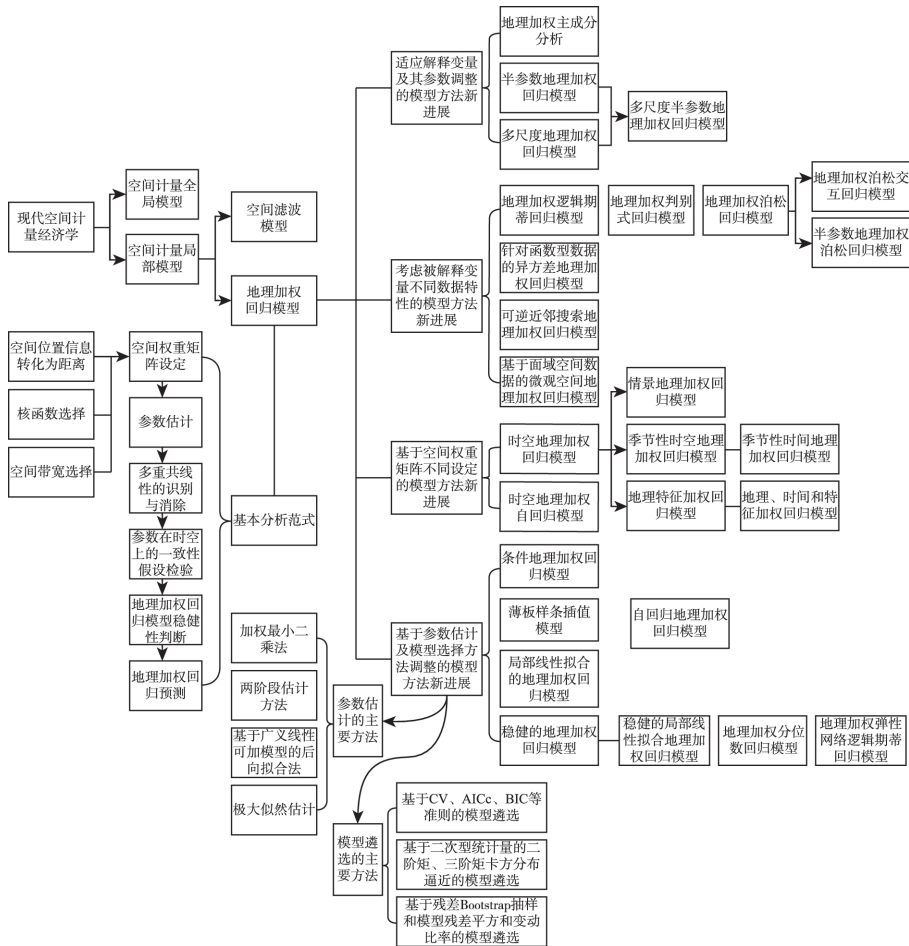


图 1 地理加权回归模型的分析范式及最新进展

尽管对地理加权回归模型方法的研究较为庞杂，然而该领域仍有一些问题尚未解决，包括目前架构的时空地理加权回归模型实际上仍然建立在时空权重矩阵设定基础

上的截面处理方法、地理加权回归模型中模型众多但目前尚未有统一的模型退化范式及假设检验方法、地理加权回归模型与空间计量全局分析模型仍处于融合研究的初始阶段,以及目前地理加权回归模型方法领域的软件较为简单且不可修订或延展等。有鉴于此,本文建议可以围绕以下四个方面展开地理加权回归模型方法的创新性研究。①如何建立适应于面板数据的时空地理加权回归模型,并在时空权重矩阵设计中准确模拟空间溢出效应的时间滞后效应及其在时期上的转移和传导效应。②如何建立地理加权回归模型族中所有流行模型之间的转化框架,并架构所有模型之间遴选的统一分析框架。③如何推进空间计量全局模型与空间计量局部模型之间融合建模的基本范式架构,拓展各种类型的地理加权回归模型与通用嵌套空间计量模型及其退化模型之间的融合建模的模型方法与参数估计、假设检验和模型遴选方法等。④如何基于最为流行的空间计量分析软件——MATLAB,对地理加权回归模型族中所有模型的建模代码进行科学撰写与标准化、平台化处理,同时对前述三个发展方向上的模型新进展进行代码的探索性编写与标准化处理等。

## 参考文献

- Atkinson P. M. , German S. E. , Sear D. A. , et al. . 2003. Exploring the Relations between Riverbank Erosion and Geomorphological Controls Using Geographically Weighted Logistic Regression [J]. *Geographical Analysis* , 35 ( 01) : 58 – 82.
- Bárcena M. J. , Menéndez P. , Palacios M. B. , et al. . 2014. Alleviating the Effect of Collinearity in Geographically Weighted Regression [J]. *Journal of Geographical Systems* , ( 16) : 441 – 466.
- Bidanset P. E. , McCord M. , Lombard J. R. , et al. . 2018. Accounting for Locational , Temporal , and Physical Similarity of Residential Sales in Mass Appraisal Modeling: Introducing the Development and Application of Geographically , Temporally , and Characteristically Weighted Regression [J]. *Journal of Property Tax Assessment & Administration* , 14 ( 02) : 4 – 12.
- Brunsdon C. , Fotheringham A. S. , Charlton M. E. . 1996. Geographically Weighted Regression: A Method for Exploring Spatial Nonstationarity [J]. *Geographical Analysis* , 28 ( 04) : 281 – 298. .
- Brunsdon C. , Fotheringham A. S. , Charlton M. . 1998. Geographically Weighted Regression-Modelling Spatial Non-Stationarity [J]. *Journal of the Royal Statistical Society* , 47 ( 03) : 431 – 443.
- Brunsdon C. , Fotheringham S. , Charlton M. . 1998. Spatial Nonstationarity and Autoregressive Models [J]. *Environment and Planning A: Economy and Space* , 30 ( 06) : 957 – 973.
- Brunsdon C. , Aitkin M. , Fotheringham S. , et al. . 1999. A Comparison of Random Coefficient Modelling and Geographically Weighted Regression for Spatial Non-Stationary Regression Problems [J]. *Geographical & Environmental Modelling* , 03 ( 01) : 47 – 62.
- Brunsdon C. , Fotheringham A. S. , Charlton M. E. . 1999. Some Notes on Parametric Significance Tests for Geographically Weighted Regression [J]. *Journal of Regional Science* , 39 ( 03) : 497 – 524.
- Brunsdon C. , Fotheringham A. S. , Charlton M. E. . 2007. Geographically Weighted Discriminant Analysis [J] , *Geographical Analysis* , 29: 376 – 396.
- Byrne G. , Charlton M. , Fotheringham S. A. . 2009. Multiple Dependent Hypothesis Tests in Geographically

- Weighted Regression [J]. *GIScience & Remote Sensing*, 45 (02): 131 – 148.
- Chen F., Mei C. . 2020. Scale-Adaptive Estimation of Mixed Geographically Weighted Regression Models [J]. *Economic Modelling*.
- Chen Y. J., Deng W. S., Yang T. C., et al. . 2012. Geographically Weighted Quantile Regression (GWQR): An Application to U. S. Mortality Data [J]. *Geographical Analysis*, 44: 134 – 150.
- Cho S., Lambert D. M., Chen Z. . 2010. Geographically Weighted Regression Bandwidth Selection and Spatial Autocorrelation: an Empirical Example Using Chinese Agriculture Data [J]. *Applied Economics Letters*, 17 (08): 767 – 772.
- Cleveland W. S., Devlin S. J. . 1988. Locally Weighted Regression: An Approach to Regression Analysis by Local Fitting [J]. *Journal of the American Statistical Association*, 83 (403): 596 – 610.
- Comber A., Harris P. . 2018. Geographically Weighted Elastic Net Logistic Regression [J]. *Journal of Geographical Systems*, 20: 317 – 341.
- Du Z., Wu S., Zhang F., et al. . 2018. Extending Geographically and Temporally Weighted Regression to Account for Both Spatiotemporal Heterogeneity and Seasonal Variations in Coastal Seas [J]. *Ecological Informatics*, 43: 185 – 199.
- Elhorst J. . 2014. *Spatial Econometrics: From Cross-Sectional Data to Spatial Panels* [M], Springer: Dordrecht, Netherlands, 8 – 10.
- Farber S., Páez A. . 2007. A Systematic Investigation of Cross-Validation in GWR Model Estimation: Empirical Analysis and Monte Carlo Simulations [J]. *Journal of Geographical Systems*, 9 (04): 371 – 396.
- Foster S. A., Gorr W. L. . 1986. An Adaptive Filter for Estimating Spatially Varying Parameters: Application to Modeling Police Hours Spent in Response to Calls for Service [J]. *Management Science*, 32 (07): 878 – 889.
- Fotheringham A. S., Brunsdon C., Charlton M. E. . 2002. *Geographically Weighted Regression: The Analysis of Spatially Varying Relationships* [M]. Chichester, UK: Wiley.
- Fotheringham A. S., Crespo R., Yao J. . 2015. Geographical and Temporal Weighted Regression (GTWR) [J]. *Geographical Analysis*, 47: 431 – 452.
- Fotheringham A. S., Oshan T. M. . 2016. Geographically Weighted Regression and Multicollinearity: Dispelling the Myth [J]. *Journal of Geographical Systems*, 18 (04): 303 – 329.
- Fotheringham A. S., Yang W., Kang, W. . 2017. Multiscale Geographically Weighted Regression (MGWR) [J]. *Annals of American Association of Geographers*, 107 (06): 1247 – 1265.
- Harris P., Brunsdon C., Charlton M. . 2011. Geographically Weighted Principal Components Analysis [J]. *International Journal of Geographical Information Science*, 25 (10): 1717 – 1736.
- Harris P., Fotheringham A. S., Juggins S. . 2010. Robust Geographically Weighted Regression: A Technique for Quantifying Spatial Relationships between Freshwater Acidification Critical Loads and Catchment Attributes [J]. *Annals of the Association of American Geographers*, 100 (02): 286 – 306.
- Harris R., Dong G., Zhang W. . 2013. Using Contextualized Geographically Weighted Regression to Model the Spatial Heterogeneity of Land Prices in Beijing, China [J]. *Transactions in GIS*, 17 (06): 901 – 919.
- He Q., Huang B. . 2018. Satellite-Based High-Resolution PM<sub>2.5</sub> Estimation over the Beijing-Tianjin-Hebei Region of China Using An Improved Geographically and Temporally Weighted Regression Model [J]. *Environmental Pollution*, 236: 1027 – 1037.
- Huang B., Wu B., Barry M. . 2010. Geographically and Temporally Weighted Regression for Modeling Spatio-

- Temporal Variation in House Prices [J]. *International Journal of Geographical Information Science*, 24 (03): 383 – 401.
- Imran M. , Stein A. , Zurita-Milla R. . 2015. Using Geographically Weighted Regression Kriging for Crop Yield Mapping in West Africa [J]. *International Journal of Geographical Information Science*, 29 (02): 1 – 24.
- Kang D. , Dall’ erba S. . 2016. Exploring the Spatially Varying Innovation Capacity of the US Counties in the Framework of Griliches’ Knowledge Production Function: A Mixed GWR Approach [J]. *Journal of Geographical Systems*, 18 (02): 125 – 157.
- Leong Y. , Yue J. C. . 2017. A Modification to Geographically Weighted Regression [J]. *International Journal of Health Geographics*, 16 (11) .
- Leung Y. , Mei C. , Zhang W. . 2000. Statistical Tests for Spatial Nonstationary Based on the Geographically Weighted Regression Model [J]. *Environment and Planning A*, 32 (01): 9 – 32.
- Lu B. , Charlton M. , Brunsdon C. , et al. . 2016. The Minkowski Approach for Choosing the Distance Metric in Geographically Weighted Regression [J]. *International Journal of Geographical Information Systems*, 30 (2): 351 – 368.
- Mei C. , He S. , Fang K. . 2004. A Note on the Mixed Geographically Weighted Regression Model [J]. *Journal of Regional Science*, 44 (01): 143 – 157.
- Mei C. , Xu M. , Wang N. . 2016. A Bootstrap Test for Constant Coefficients in Geographically Weighted Regression Models [J]. *International Journal of Geographical Information Science*, 30 (08): 1622 – 1643.
- Murakami D. , Tsutsumi M. . 2015. Area-to-Point Parameter Estimation with Geographically Weighted Regression [J]. *Journal of Geographical system*, 17: 207 – 225.
- Nakaya T. . 2001. Local Spatial Interaction Modelling Based on the Geographically Weighted Regression Approach [J]. *GeoJournal*, 53: 347 – 358.
- Nakaya T. , Fotheringham A. S. , Brunsdon C. , et al. . 2005. Geographically Weighted Poisson Regression for Disease Association Mapping [J]. *Statistics in Medicine*, 24 (17) .
- Oshan T. M. , Fotheringham A. S. . 2018. A Comparison of Spatially Varying Regression Coefficient Estimates Using Geographically Weighted and Spatial-Filter-Based Techniques [J]. *Geographical Analysis*, 50: 53 – 75.
- Páez A. . 2004. Anisotropic Variance Functions in Geographically Weighted Regression Models [J]. *Geographical Analysis*, 36 (04): 299 – 314.
- Romano E. , Mateu J. , Butzbach O. . 2020. Heteroskedastic Geographically Weighted Regression Model for Functional Data [J]. *Spatial Statistics*, 100444.
- Shariat-Mohaymany A. , Shahri M. , Mirbagheri B. , et al. . 2015. Exploring Spatial Non-Stationarity and Varying Relationships between Crash Data and Related Factors Using Geographically Weighted Poisson Regression [J]. *Transactions in Gis*, 19 (02): 321 – 337.
- Shi H. , Zhang L. , Liu J. . 2006. A New Spatial-Attribute Weighting Function for Geographically Weighted Regression [J]. *Canadian Journal of Forest Research*, 36 (04): 996 – 1005.
- Silva A. R. D. , Fotheringham A. S. . 2016. The Multiple Testing Issue in Geographically Weighted Regression [J]. *Geographical Analysis*, 48 (03): 233 – 247.
- Tasyurek M. , Celik M. . 2020. RNN-GWR: A Geographically Weighted Regression Approach for Frequently Updated Data [J]. *Neurocomputing*, 399: 258 – 270.
- Wang N. , Mei C. , Yan X. . 2008. Local Linear Estimation of Spatially Varying Coefficient Models: An Improvement on the Geographically Weighted Regression Technique [J]. *Environment and Planning A*, 40:



986 – 1005.

- Wang Y. . 1998. Smoothing Spline Models with Correlated Random Errors [J]. *Journal of the American Statistical Association* ,93 ( 441) : 341 – 348.
- Wheeler D. , Tiefelsdorf M. . 2005. Multicollinearity and Correlation among Local Regression Coefficients in Geographically Weighted Regression [J]. *Journal of Geographical Systems* ,7 ( 02) : 161 – 187.
- Wu B. , Li R. , Huang B. . 2014. A Geographically and Temporally Weighted Autoregressive Model with Application to Housing Prices [J]. *International Journal of Geographical Information Science* ,28 ( 05) : 1186 – 1204.
- Yu H. , Fotheringham A. S. , Li , Z. , et al. . 2020. On the Measurement of Bias in Geographically Weighted Regression Models [J]. *Spatial Statistics* ,100453.
- Zhang H. , Mei C. . 2011. Local Least Absolute Deviation Estimation of Spatially Varying Coefficient Models: Robust Geographically Weighted Regression Approaches [J]. *International Journal of Geographical Information Science* ,25 ( 09) : 1467 – 1489.