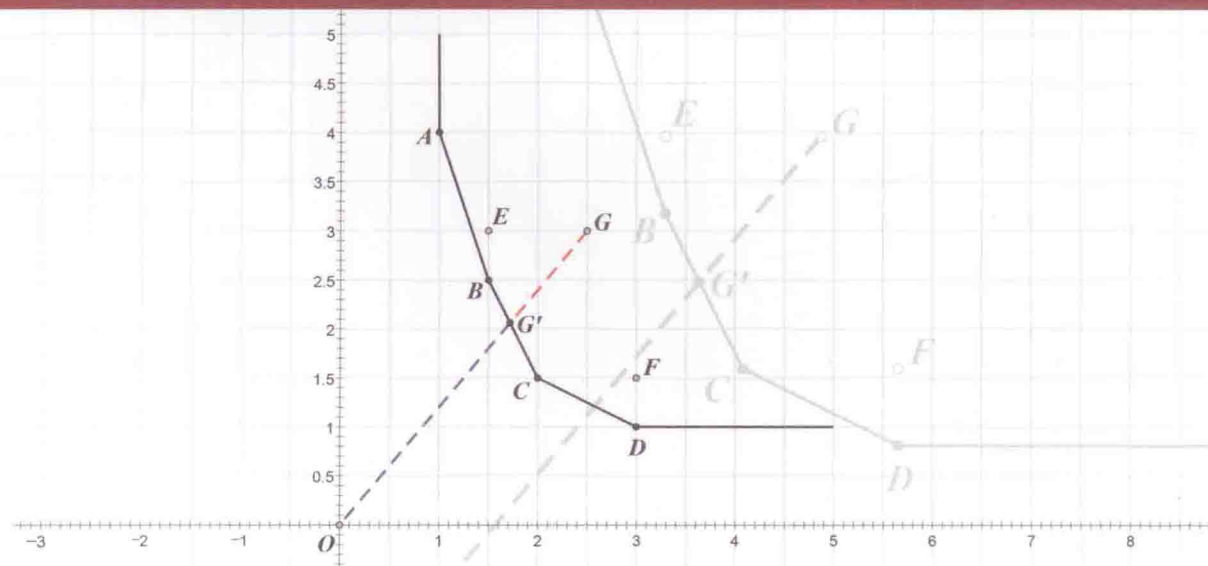


Data Envelopment Analysis:  
Methods and MaxDEA Software

# 数据包络分析方法 与MaxDEA软件

◎成刚 著



知识产权出版社

全国百佳图书出版单位

责任编辑：石陇辉 封面设计：刘 伟

## 数据包络分析与MaxDEA软件

数据包络分析（DEA）是一种应用非常广泛的效率分析方法。本书通过方法介绍与软件操作相结合、数学模型与图示相结合的叙述方法，为广大 DEA 的应用者提供一本容易看懂、简单实用的指导书。同时在书中穿插了作者过去 5 年学习研究 DEA 的成果。

本书第 1 章介绍了 DEA 的基本情况和 MaxDEA 软件的基本操作方法，第 2 章介绍了 DEA 基础模型（CCR 和 BCC），第 3 章介绍了 DEA 模型的规模收益类型与规模弹性的计算方法，第 4 章介绍了 DEA 模型的各种距离函数，第 5 章介绍了超效率模型并给出了 VRS 超效率模型无可行解问题的解决方案，第 6 章介绍了在 DEA 模型中对投入和产出指标的特殊处理方法，第 7 章是广义 DEA 模型，第 8 章是面板数据 DEA 模型。在各章中均包含了 MaxDEA 软件求解实例或详细操作方法。



上架建议：经济管理

ISBN 978-7-5130-2718-2



ISBN 978-7-5130-2718-2

定价：58.00元

# 数据包络分析方法与 MaxDEA 软件

Data Envelopment Analysis: Methods and MaxDEA Software

成 刚 著



知识产权出版社

## 图书在版编目 (CIP) 数据

数据包络分析方法与 MaxDEA 软件/成刚著. —北京: 知识产权出版社, 2014. 5  
ISBN 978-7-5130-2718-2

I. ①数… II. ①成… III. ①统计数据—统计分析—应用软件 IV. ①O212.1-39

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 093545 号

## 内容提要

数据包络分析 (DEA) 是一种应用非常广泛的效率分析方法。本书通过方法介绍与软件操作相结合、数学模型与图示相结合的叙述方法, 为广大 DEA 的应用者提供一本容易看懂、简单实用的指导书。同时在书中穿插了笔者过去 5 年学习研究 DEA 的成果。

本书第 1 章介绍了 DEA 的基本情况和 MaxDEA 软件的基本操作方法, 第 2 章介绍了 DEA 基础模型 (CCR 和 BCC), 第 3 章介绍了 DEA 模型的规模收益类型与规模弹性的计算方法, 第 4 章介绍了 DEA 模型的各种距离函数, 第 5 章介绍了超效率模型并给出了 VRS 超效率模型无可行解问题的解决方案, 第 6 章介绍了在 DEA 模型中对投入和产出指标的特殊处理方法, 第 7 章是广义 DEA 模型, 第 8 章是面板数据 DEA 模型。在各章中均包含了 MaxDEA 软件求解实例或详细操作方法。

责任编辑: 石陇辉

封面设计: 刘伟

责任校对: 董志英

责任出版: 刘译文

## 数据包络分析方法与 MaxDEA 软件

成刚著

出版发行: 知识产权出版社有限责任公司

社址: 北京市海淀区马甸南村 1 号

责编电话: 010-82000860 转 8175

发行电话: 010-82000860 转 8101/8102

印刷: 北京市凯鑫彩色印刷有限公司

开本: 787mm × 1092mm 1/16

版次: 2014 年 8 月第 1 版

字数: 306 千字

ISBN 978-7-5130-2718-2

网 址: <http://www.ipph.cn>

邮 编: 100088

责编邮箱: [shilonghui@cnipr.com](mailto:shilonghui@cnipr.com)

发行传真: 010-82000893/82005070/82000270

经 销: 各大网上书店、新华书店及相关专业书店

印 张: 15

印 次: 2014 年 8 月第 1 次印刷

定 价: 58.00 元

出版权专有 侵权必究

如有印装质量问题, 本社负责调换。

# 前 言

数据包络分析 (Data Envelopment Analysis, DEA) 是一种非参数技术效率分析方法, 由美国的 Charnes、Cooper 和 Rhodes 3 人于 1978 年首次提出。自 DEA 诞生以来的 36 年中, DEA 理论与方法发展迅速, 应用范围不断扩展, 应用数量持续加速增长。

笔者对 DEA 方法的学习始于 7 年前博士在读期间, 虽然最终博士学位论文并未采用 DEA 方法, 但自那时起, 笔者对 DEA 的学习兴趣与日俱增。在北京大学博士后工作期间, 笔者得以有连续的时间对 DEA 理论方法进行深入学习。作为一个 DEA 方法的应用者, 笔者深深体会到, 虽然 DEA 的原理并不深奥, 但是对于大部分 DEA 方法的应用者来说, 通过自己编程求解 DEA 模型存在很大的困难, 即使能够编程, 也往往对结果的正确性存在疑虑。

DEA 应用数量的持续增加很大程度上源于 DEA 软件的推动作用。但是由于 DEA 软件的用户数量相对较少, 其开发进展远远落后于统计软件。在 MaxDEA 软件开发之前, 即使是一些简单的组合应用, 如包含非期望产出的 Malmquist 模型, 也没有合适的 DEA 软件。

在面临所需模型没有可用软件的情况下, 2009 年年初, 笔者萌生了自己开发 DEA 软件的想法。由于笔者具有数据库编辑基础, 所以开发 DEA 软件的过程相当顺利, 仅花了两个月的时间, 即完成了软件第一版的设计和编写工作。软件开发的成功, 更进一步促进了笔者对 DEA 深入学习和研究的兴趣。

在对 DEA 学习研究和 MaxDEA 软件开发过程中, 笔者也提出了一些新的 DEA 计算方法及自己对一些问题的见解。在本书部分章节的标题前标注有星号, 这些内容是笔者过去 5 年学习研究 DEA 的一些成果。

在为 MaxDEA 软件用户提供技术指导的过程中, 笔者了解了用户对 DEA 理论方法的掌握程度以及他们对 DEA 软件和 DEA 教材的需求, 这也决定了本书的读者定位和写作风格。本书主要面向 DEA 方法的学习者和应用者, 笔者向不同需求的读者提出以下阅读建议。

(1) 对于偶尔使用 DEA 方法分析数据, 对分析结果只求知其然, 不求知其所以然的学习者和应用者, 建议至少阅读:

- 1.3 MaxDEA 软件的基本操作
- 2.10 DMU 数量、投入产出指标和模型导向的选择
- 2.11 MaxDEA 求解 DEA 基础模型示例

(2) 对于把 DEA 作为常用的分析方法, 或者采用 DEA 完成学位论文的研究生, 以及力求掌握 DEA 的基本原理, 从而能够正确选择 DEA 模型, 并希望在使用方法上有所创新的应用者, 建议可略过以下章节, 阅读全书其他内容:

3.3 规模弹性

4.4 方向向量扫描模型

4.5 至弱有效前沿最近距离

4.6 混合距离函数

本书在整体结构上由简入难, DEA 方法介绍与软件操作相结合, 尽量使用图示来阐明 DEA 模型的原理, 仅在必要时给出简单的推导。但是要深入理解 DEA 模型, 仍然需要读者去理解模型的规划式, 这只需具备最基本的线性规划常识, 例如需要明白数学表达式  $\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}$  (或其矩阵形式  $X\lambda$ ) 以及目标函数 Max 和 Min 的含义。

本书的出版得到了中国博士后科学基金特别资助的支持, 在此深表感谢。

笔者与本书所定位的读者一样, 也是 DEA 的学习者和应用者, 受水平所限, 书中错误和不足之处恳请读者不吝指正。

联系方式:

E-mail: MaxDEA@qq.com

QQ: 985468318

QQ 群: MaxDEA (94321215)

网址: www.maxdea.cn

成 刚

2014 年 3 月

# 目 录

第1章 引言 .....	1
1.1 数据包络分析简介 .....	1
1.2 MaxDEA 软件的主要特点 .....	1
1.3 MaxDEA 软件的基本操作 .....	2
1.3.1 MaxDEA 软件的系统要求 .....	2
1.3.2 准备数据 .....	3
1.3.3 运行模型 .....	6
1.4 MaxDEA 软件注册 .....	8
第2章 DEA 基础模型 .....	10
2.1 技术效率的概念 .....	10
2.2 基于规模收益不变的 CCR 模型 .....	11
2.2.1 投入导向 CCR 模型的规划式 .....	11
2.2.2 产出导向 CCR 模型的规划式 .....	15
2.2.3 投入导向 CCR 模型图解 .....	15
2.2.4 产出导向 CCR 模型图解 .....	17
2.3 基于规模收益可变的 BCC 模型 .....	18
2.3.1 投入导向 BCC 模型的规划式 .....	18
2.3.2 产出导向 BCC 模型的规划式 .....	19
2.3.3 投入导向 BCC 模型图解 .....	19
2.3.4 产出导向 BCC 模型图解 .....	20
2.4 FDH 模型 .....	20
2.5 投入导向和产出导向效率值的关系 .....	21
2.6 规模效率问题 .....	22
2.7 DEA 模型的命名问题 .....	23
2.8 强有效、弱有效与松弛变量问题 .....	23
2.9 比例改进与松弛改进的关系 .....	26
2.10 DMU 数量、投入产出指标和模型导向的选择 .....	27
2.10.1 DEA 模型对 DMU 数量的要求 .....	27
2.10.2 投入和产出指标的选择 .....	27
2.10.3 模型导向的选择 .....	29

2.11	MaxDEA 求解 DEA 基础模型示例	30
2.11.1	模型设置	31
2.11.2	分析结果	36
<b>第3章</b>	<b>DEA 模型的规模收益与规模弹性</b>	<b>44</b>
3.1	DEA 模型的规模收益类型	44
3.2	DMU 规模收益状态的判断	46
3.2.1	通过包络模型判断规模收益状态	46
3.2.2	通过乘数模型判断规模收益状态	49
3.3	规模弹性	52
3.3.1	规模弹性的概念	52
*3.3.2	通过包络模型直接求解规模弹性 (直接法)	53
3.3.3	通过乘数模型求解规模弹性 (虚拟投入产出法)	58
3.4	用 MaxDEA 求解规模收益状态和规模弹性示例	60
<b>第4章</b>	<b>DEA 模型的距离函数</b>	<b>62</b>
4.1	至前沿最远距离 (SBM 模型)	62
4.1.1	SBM 模型	62
4.1.2	加权 SBM 模型	64
4.1.3	MSBM 模型	65
*4.1.4	投影值约束 SBM 模型	66
4.1.5	MaxDEA 求解 SBM 模型和加权 SBM 模型示例	67
4.1.6	MaxDEA 求解投影值约束 SBM 模型示例	69
4.2	至强有效前沿最近距离	70
4.2.1	非导向至强有效前沿最近距离的计算方法	70
4.2.2	MaxDEA 求解非导向 MinDS 模型示例	80
*4.2.3	MinDS 模型的特殊性	88
*4.2.4	求解投入导向和产出导向 MinDS 模型的方法	92
4.2.5	MaxDEA 求解投入导向和产出导向 MinDS 模型示例	96
4.3	方向距离函数	97
4.3.1	方向距离函数模型	97
4.3.2	方向距离函数模型的乘数形式	98
4.3.3	方向距离函数模型中对坏产出的处理及 对弱可处置性是否合理的讨论	99
4.3.4	方向距离函数模型的几种特例	105
*4.3.5	一般方向距离函数模型效率值的计算方法	107
*4.3.6	对方向距离函数模型的扩展	108
4.3.7	MaxDEA 求解方向距离函数模型示例	109
*4.4	方向向量扫描模型	115



4.4.1	方向向量扫描模型的定义和功能	115
4.4.2	方向向量扫描的实现方法	116
4.4.3	MaxDEA 求解方向向量扫描模型示例	126
4.4.4	通过方向向量扫描建立无差异曲线	127
4.5	至弱有效前沿最近距离	133
4.5.1	至弱有效前沿最近距离的计算方法	133
4.5.2	MaxDEA 求解 MinDW 模型示例	136
4.6	混合距离函数	137
4.6.1	EBM 模型	137
*4.6.2	EBM 模型的缺陷与改进方法	139
4.6.3	Hybrid 模型	143
4.6.4	MaxDEA 软件求解混合距离函数模型操作方法	144
4.7	包含价格信息的距离函数	145
4.7.1	成本效率、收益效率、利润效率模型	145
4.7.2	MaxDEA 软件求解成本效率等模型的操作方法	147
<b>第 5 章</b>	<b>超效率模型</b>	<b>149</b>
5.1	径向超效率模型	149
5.2	方向距离函数超效率模型	151
5.3	SBM 超效率模型	151
5.4	超效率模型无可行解问题	154
5.4.1	VRS 超效率模型无可行解的原因	154
5.4.2	VRS 超效率模型无可行解的解决方法一	159
*5.4.3	VRS 超效率模型无可行解的解决方法二	162
*5.4.4	VRS 超效率模型无可行解的解决方法三	171
5.5	MaxDEA 软件求解超效率模型示例	175
5.5.1	对 VRS 超效率模型无可行解问题解决方法比较	175
5.5.2	通过超效率模型探测异常数据	179
<b>第 6 章</b>	<b>DEA 模型中对特殊投入产出指标的处理</b>	<b>180</b>
6.1	坏产出投入指标	180
6.2	指标中存在 0 的问题	181
*6.3	负数指标问题	181
6.4	外部不可控因素或不可控投入产出指标	183
6.5	限制投入产出指标的目标值边界	185
6.6	保证域模型	186
<b>第 7 章</b>	<b>广义 DEA 模型</b>	<b>190</b>
7.1	广义 DEA 模型	190

7.2 群组参比模型 .....	192
7.2.1 自我参比 .....	192
7.2.2 交叉参比 .....	192
7.2.3 向下参比 .....	193
7.2.4 向上参比 .....	193
7.2.5 下方邻群参比 .....	194
7.2.6 上方邻群参比 .....	194
7.2.7 窗口参比 .....	194
7.3 群组参比模型的数据格式 .....	196
7.4 MaxDEA 软件求解广义 DEA 模型的操作示例 .....	197
7.4.1 自定义被评价集和参考集 .....	197
7.4.2 Metafrontier 技术缺口比率 .....	198
<b>第 8 章 面板数据模型</b> .....	<b>200</b>
8.1 窗口模型 .....	200
8.2 Malmquist 模型 .....	201
8.2.1 相邻参比 Malmquist 指数 (Adjacent Malmquist) .....	201
8.2.2 固定参比 Malmquist 指数 (Fixed Malmquist) .....	204
8.2.3 全局参比 Malmquist 指数 (Global Malmquist) .....	205
8.2.4 序列参比 Malmquist 指数 (Sequential Malmquist) .....	206
8.2.5 窗口参比 Malmquist 指数 (Window Malmquist) .....	207
8.2.6 各类 Malmquist 指数比较 .....	209
8.3 MaxDEA 软件中各类 Malmquist 模型的操作 .....	211
8.4 MaxDEA 软件中各类 Malmquist 模型的结果 .....	213
8.5 Malmquist 指数的分解 .....	217
8.5.1 Färe R 等人 (1992) 的分解方法 .....	218
8.5.2 Färe R 等人 (1994) 的分解方法 .....	218
8.5.3 Ray S C 和 Desli (1997) 的分解方法 .....	219
8.5.4 Zofio (2007) 的分解方法 .....	219
8.6 几种常用的 Malmquist 组合模型 .....	220
8.6.1 Malmquist - Luenberger 指数 .....	220
8.6.2 成本 - Malmquist 指数 .....	220
8.6.3 Metafrontier - Malmquist 模型 .....	221
<b>附 录</b> .....	<b>223</b>
附 1 本书未介绍的 MaxDEA 包含的模型 .....	223
附 2 MaxDEA 的一些使用技巧 .....	223
附 3 MaxDEA 软件版本更新及功能 .....	225
<b>参考文献</b> .....	<b>227</b>

# 第1章 引言

## 1.1 数据包络分析简介

数据包络分析 (Data Envelopment Analysis, DEA) 是一种基于被评价对象间相对比较的非参数技术效率分析方法, 是由美国的 Charnes、Cooper 和 Rhodes 3 人于 1978 年首次提出的, 因此后来将 DEA 的第一个模型命名为 CCR 模型 (Charnes A, et al., 1978)。由于 DEA 具有适用范围广、原理相对简单的特点, 特别是在分析多投入多产出的情况时具有特殊的优势, 因而其应用范围拓展迅速, 涉及教育、农业、环境、宏观经济、金融、税务、医疗卫生、体育、公共交通、电力、邮政、电信、物流、军队、企业管理等众多的领域 (Coelli, et al., 2005; Cook W D & Seiford, 2009; Cook Wade D. & Zhu, 2005; Cooper William W, et al., 2007; Cooper William W, et al., 2004; Ray Subhash C, 2004; Seiford Lawrence M, 1996)。

DEA 理论方法和软件的发展, 极大地推动了 DEA 在学术领域的研究和应用。据不完全统计, 国际上公开发表的 DEA 论文数量在 2007 年超过了 4000 篇 (Emrouznejad Ali, et al., 2008)。根据笔者的检索统计, 截至 2013 年 5 月, 仅在 Web of Science (通常所讲的 SCI 和 SSCI 数据库) 中就检索到 DEA 主题文献数量近 6000 篇, 在 CNKI 数据库中检索到的 DEA 文献数量超过了 5000 篇。

## 1.2 MaxDEA 软件的主要特点

(1) 使用简便。MaxDEA 软件无须安装, 界面友好, 数据不需要特殊格式。例如, 不需要通过字段名称或排列次序来识别投入和产出。

(2) DEA 模型的备份非常简单。MaxDEA 软件和 DEA 模型所需的全部数据均被整合在一个 Access 文件中 (例如 MaxDEA 6. mdb 文件, 这是软件运行所需的唯一文件), 并且是永久保存, 关闭和重新打开文件都不会使之发生变化, 也就是说只要备份 MaxDEA 6. mdb 文件就等于备份了 MaxDEA 软件和建立的 DEA 模型。例如, 设置好数据和模型之后, 将 MaxDEA 6. mdb 文件复制一份 (文件名可任意修改, 例如 DEA CRS. mdb), 即备份了已设置好的模型和数据。

(3) 对决策单元 (Decision Making Unit, DMU) 数量没有限制。经测试可以运行包含 10 万个 DMU 的 DEA 模型。

(4) 可以同时运行多个 DEA 模型。可以依次设置并保存多个 DEA 模型，然后可以同时打开并运行所有这些文件。如果用户需要运行多个 DEA 模型，并且每个 DEA 模型的运行时间都很长（如 Bootstrap 模型），则同时运行多个模型可以节省很长时间，并且可以充分利用用户的多核 CPU。

(5) MaxDEA 最重要的特点是包含了大量最新的 DEA 方法，各类 DEA 方法之间可任意组合使用。只需同时设置多个 DEA 模型选项，即为这些选项组合构成的 DEA 模型，如成本模型与 Malmquist 模型组合为成本 Malmquist 模型，网络 DEA 与 Malmquist 组合为网络 Malmquist 模型，非期望产出模型与方向距离函数模型、Malmquist 模型组合为包含非期望产出的方向距离函数 Malmquist 模型（Malmquist - Luenberger 指数）等。

## 1.3 MaxDEA 软件的基本操作

### 1.3.1 MaxDEA 软件的系统要求

MaxDEA 可以在任何语言的多种 Windows 操作系统下运行，包括 Windows 2000、Windows XP、Windows 2003、Windows Vista、Windows 7、Windows 8 及未来更高的 Windows 版本。

MaxDEA 软件是采用 Access VBA 平台开发的。与通常我们所使用的软件不同，MaxDEA 软件并非可执行文件（exe 文件），也没有安装文件（setup.exe），而是 Access 数据库文件。MaxDEA 软件的程序文件就是软件压缩包内的 MaxDEA X.mdb 文件，X 表示版本号（见图 1-1）。MaxDEA 软件本身不需要安装，直接打开运行 MaxDEA X.mdb 数据库文件即可。但是运行 MaxDEA 软件，需要计算机上安装有 Microsoft Access 软件。

如果软件包内的文件 MaxDEA X.mdb 无法打开（计算机无法识别该文件类型），则说明该计算机尚未安装 Microsoft Office Access。Access 是 Microsoft Office 专业版中包含的数据库软件。

MaxDEA 用户可以选择安装 Microsoft Office 专业版中的完整版 Access 软件，也可以安装 Microsoft 免费提供的 Access 运行时版本（Runtime 版本）。

32 位 MaxDEA 需要安装 Access 2003、Access 2007、32 位 Access 2010、Access 2013 或更高版本。64 位 MaxDEA 需要安装 64 位 Access 2010 SP1（或更高 SP），Access 2013 或更高版本。

Access 2013 Runtime 版本下载地址（32 位和 64 位）：



图 1-1 MaxDEA 软件的程序文件

<http://www.microsoft.com/en-us/download/details.aspx?id=39358>

Access 2010 Runtime 版本下载地址 (32 位和 64 位):

<http://www.microsoft.com/en-us/download/details.aspx?id=10910>

Access 2007 Runtime 版本下载地址 (32 位):

<http://www.microsoft.com/en-us/download/details.aspx?id=4438>

### 1.3.2 准备数据

建立 DEA 模型的第一步是准备 DEA 模型所用的数据。MaxDEA 支持的数据类型包括 Excel、Access、dBase 和逗号分隔的文本文件。最方便的方法是在 Excel 中准备所需的数据。

#### (1) 数据格式。

MaxDEA 要求数据采用标准的数据表格格式，即第一行表示指标或变量的名称（在数据库中一般称为字段），并且只能有一行表示指标的名称（见表 1-1、表 1-2）。MaxDEA 对指标的名称及其排列顺序没有特殊要求。投入（产出）指标的字段名称可以自由设定。需要注意的是，在 MaxDEA 6.2 及更早版本中，指标名称的前面不能有空格。例如，“投入 1”如果在“投入”的前面有个空格，是不允许的。数据从 PDF 文件复制时常常出现这样的问题。从 PDF 文件复制数据时，还容易发生数字之间存在空格的问题，这也是不允许的。例如“1. 23” or “1.23”，将被 Excel 识别为文本，而不是数字。MaxDEA 6.3 及更高版本会自动识别并删除上述空格。

表 1-1 正确的数据格式

Company	Capital	Labor	Product
A	4323	875	93608
B	2295	469	225559
C	6379	1286	327068
D	6644	1339	201354
E	1436	297	188926

表 1-2 错误的格式

DMU	Input		Output
Company	Capital	Labor	Product
A	4323	875	93608
B	2295	469	225559
C	6379	1286	327068
D	6644	1339	201354
E	1436	297	188926

#### (2) DMU 名称。

在数据表中必须有一列用于表示各个 DMU 的名称 (DMU Name)。DMU 名称

可以是字母（支持中文），也可以是数字或字母数字组合。MaxDEA 的分析结果是按照 DMU 的名称排序的（与原始数据的顺序无关）。如果 DMU 的名称采用数字表示（如 1, 2, ..., 100），在导入数据后，MaxDEA 会自动在数字前面增加必要的前导 0，从而使数字的位数相等，即 001, 002, ..., 100。这样分析结果就可以按照正常的序号进行排列<sup>①</sup>。前导 0 增加的个数决定于最大数字的长度。

用于 DEA 模型的数据不允许有缺失值（见表 1-3）。如果 DMU 名称存在缺失值，会出现错误提示“*There is at least one DMU whose ‘DMU Name’ is empty*”或者“*无效使用 Null*”。如果其他字段（包括 Input、Outputs、Period 和 Cluster 等）存在缺失值，则会出现错误提示“*... must be numeric*”或“*... must be integer*”。

表 1-3 DEA 模型的数据不允许缺失值

Company	Capital	Labor	Product
A	4323	875	93608
B	2295	469	225559
C	6379	×	327068
D	6644	1339	201354
×	1436	297	188926

### （3）面板数据格式。

在面板数据中必须有一列数据来表示数据的时间。MaxDEA 对面板数据的排列顺序没有特殊要求。面板数据可以按照 DMU 的名称排序，也可以按照时间排序，也可以不排序。

表示时间的变量必须是整数，可以是连续的整数序列，如 1, 2, 3, ..., 2001, 2002, 2003, ...；也可以是非连续的整数序列，如 1, 2, 5, 8, ..., 2001, 2005, 2009, ..., 200101, 200102, 200302, ...

MaxDEA 从 6.1 版开始，在 Malmquist 模型中允许使用非平衡面板数据，即允许在部分时间有缺失数据（见表 1-4、表 1-5）。

### （4）导入和定义数据。

打开菜单“Step 1: Prepare Data”（见图 1-2），选择要导入的数据文件，指定工作表（如果文件中存在多个数据表），完成数据导入。

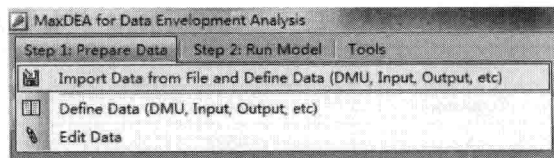


图 1-2 数据导入

<sup>①</sup> 在 MaxDEA 中，DMU 名称无论是字母（可以是中文）还是数字都会被当做文本处理，如果不增加前导 0，采用数字作为 DMU 名称时，分析结果的排序为 1, 10, 100, 11, 12, ..., 19, 2, 20, 21, ..., 9, 90, ..., 99。

表 1-4 面板数据格式示例 (平衡面板)

Period	Company	Capital	Labor	Product
1	A	4323	875	93608
1	B	2295	469	225559
1	C	6379	1286	327068
2	A	6644	1339	201354
2	B	1436	297	188926
2	C	6281	1266	413738
3	A	7459	1502	114022
3	B	4464	903	212444
3	C	4524	915	462677

表 1-5 面板数据格式示例 (非平衡面板)

Period	Company	Capital	Labor	Product
1	A	4323	875	93608
1	B	2295	469	225559
1	C	6379	1286	327068
2	A	6644	1339	201354
2	B	1436	297	188926
3	A	7459	1502	114022
3	B	4464	903	212444
3	C	4524	915	462677

在数据导入后,软件会自动显示数据定义 (Define Data) 的窗口 (见图 1-3)。

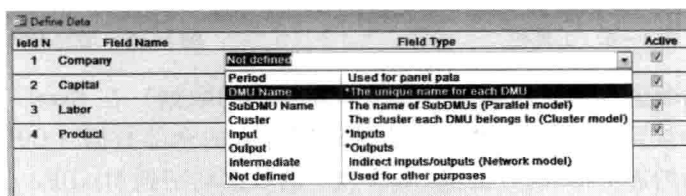


图 1-3 数据定义窗口

定义数据就是告诉 MaxDEA, 在数据中哪一列是 DMU 名称 (DMU Name), 哪一列或哪几列是投入变量 (Input), 哪一列或哪几列是产出变量 (Output)。DMU Name、Input 和 Output 是三个必须要定义的内容。如果是面板数据, 还须指定哪个变量是时间变量 (Period)。

在定义好 DEA 模型之后, 如果想在模型中剔除一些投入或产出指标, 只须将该指标重新定义为 “Not defined”, 或者取消勾选 “Active” 复选框即可。只有那些被勾选的投入 (产出) 指标才会包含在 DEA 模型中。

数据导入和数据定义仅须操作一次即可。关闭 MaxDEA 后, 导入的数据及数

据定义均不会丢失。

### (5) 增加或删除 DMU。

在导入数据后，如果想增加或删除 DMU，不需要重新导入和定义数据，可以在数据编辑窗口中增加或删除 DMU 数据（见图 1-4）。

打开菜单“Step 1: Prepare Data→Edit Data”。

删除 DMU：点击左侧边栏（如图 1-5 箭头所指），选中要删除的 DMU（按住 Shift 键可连续多选），点右键或工具栏的删除记录按钮（见图 1-6）。

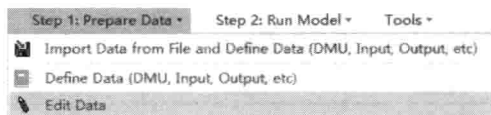


图 1-4 数据编辑窗口

Period	DMU	Cluster	Doctor	Doctor
1	A	1		20
1	B	1		19
1	C	1		25
1	D	1		27
1	E	1		22
1	F	1		55
1	G	1		33
1	H	1		31
1	I	1		30
				56
				53
				38

图 1-5 删除 DMU

增加 DMU：在 Excel 中复制要增加的 DMU 的数据（数据各列必须与导入的数据一一对应），然后在数据表的末行 \* 处点右键，粘贴即可（见图 1-7）。

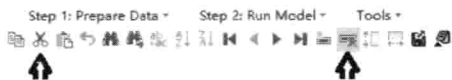


图 1-6 工具栏

1	I	1		30
1	J	1		50
1	K	1		53
1	L	1		38
*				

图 1-7 增加 DMU

也可将新数据（包含已导入的数据和要增加的数据）在 Excel 表中整理好，在 MaxDEA 中按照上面删除 DMU 的方法删除导入的全部数据（Ctrl + A 全选），然后按照上面增加 DMU 的方法将 Excel 表中的数据粘贴到 MaxDEA 的数据表中。这样可以省去重新导入数据后还要重新定义数据的步骤。

### 1.3.3 运行模型

打开菜单“Step 2: Run Model”，有 3 个选项，如图 1-8 所示。



图 1-8 运行模型



一是“Run Envelopment Model”，即通常所说的数据包络模型（见图1-9）；二是“Run Multiplier Model”，即通常所说的乘数模型（见图1-10）；三是“Express to Basic Models”，这个选项无须任何设置即可直接运行CCR和BCC模型。

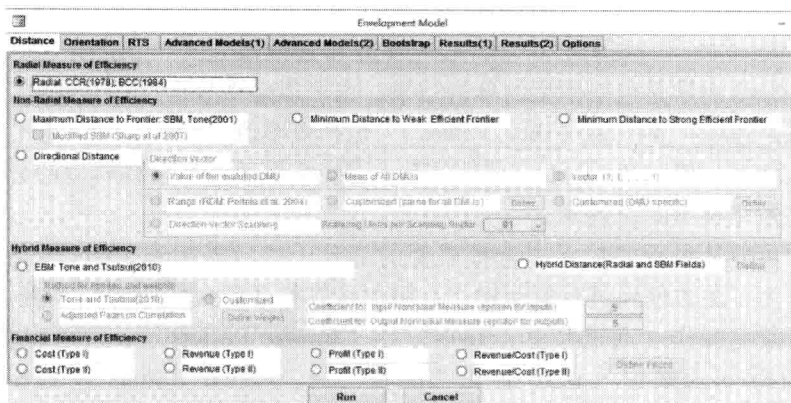


图 1-9 数据包络模型

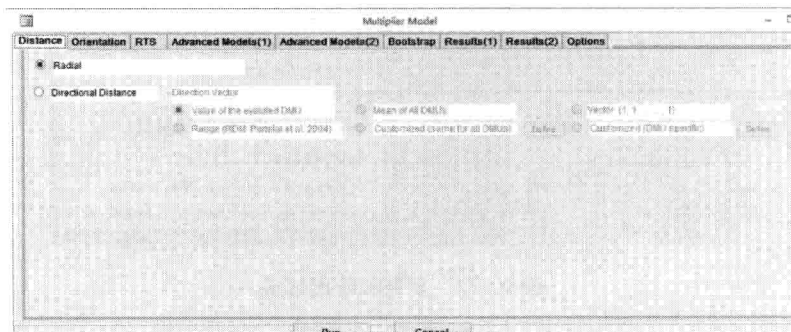


图 1-10 乘数模型

关于 Run Envelopment Model 和 Run Multiplier Model 的具体设置，将在后续各章节做详细介绍。

运行后自动显示分析结果（见图1-11），分析结果通常有三个选项。

Summary	Score, Benchmarks, ...	Weights(Dual Values)
Number of DMUs		31
Number of Inputs		2
Number of Outputs		2
Distance		Radial
Orientation		Output-oriented
Returns to Scale		Constant
Stack Computation		1 Stage
Extended Options		

图 1-11 分析结果

第一个选项“Summary”是对模型主要选项的总结，包括 DMU 数量、投入和产出的数量、距离函数类型（Distance）、模型导向（Orientation）和规模收益（RTS）类型等。

第二个选项“Score, Benchmarks”包括效率值（Score）、参考标杆（Benchmark and Lambda）、改进值（包括比例改进和松弛改进）、目标值（Projection）等。这些结果通常是包络模型的分析结果，也可以是乘数模型的对偶解。

第三个选项“Weights (Dual Values)”包括效率值（Score）、权重（Weight）、虚拟投入和产出值（Weighted Value）等。这些结果通常是乘数模型的分析结果，也可以是包络模型的对偶解。

用户可以从显示的结果中选择需要的部分，然后复制到 Excel 表格或 Word 文件中。为了更方便地进行复制操作，用户可以打开后台的所有结果表格，在表格中进行复制操作（通过菜单“Tools”→“Browse Results”），还可以将全部结果导出到 Excel 表格中（通过菜单“Tools”→“Export Results to Excel”），如图 1-12 所示。

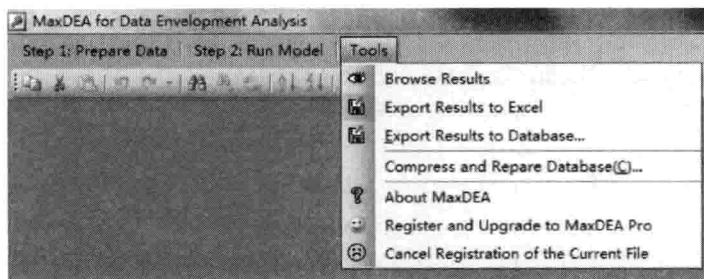


图 1-12 复制和导出结果

## 1.4 MaxDEA 软件注册

MaxDEA 软件有两个版本：MaxDEA Basic 和 MaxDEA Pro。MaxDEA Basic 为免费版本，可以在 <http://www.MaxDEA.cn> 网站免费下载使用。MaxDEA Basic 在付费注册后自动升级为 MaxDEA Pro，如图 1-13 所示。

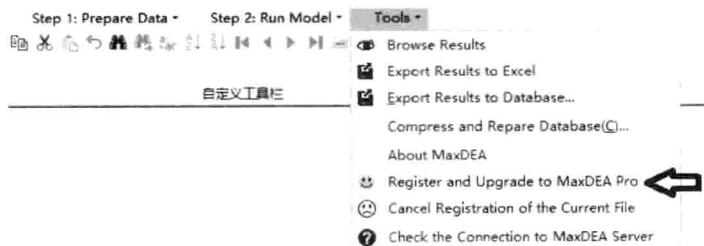


图 1-13 注册和升级

MaxDEA Basic 只能运行常用的 DEA 模型，包括径向模型、SBM 模型、成本模型等，但对 DMU 的数量没有限制。显示为灰色的模型需要注册升级为 MaxDEA Pro 才能运行（见图 1-14）。

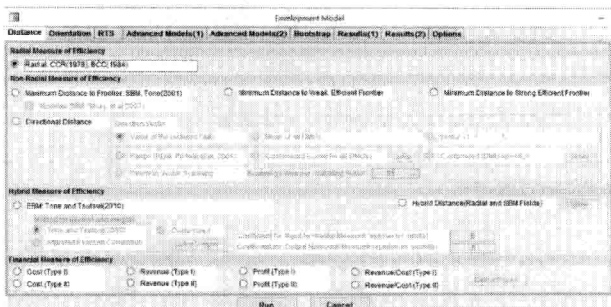


图 1-14 MaxDEA 可运行的 DEA 模型

MaxDEA Pro 分为永久版和一年版，永久版无使用期限限制，一年版使用期限为 12 个月。一年版在使用时软件会自动联网检测是否在有效期内，因此在无网络连接的情况下无法使用。

## 第2章 DEA基础模型

### 2.1 技术效率的概念

技术效率指一个生产单元的生产过程达到该行业技术水平的程度。技术效率反映的是一个生产单元技术水平的高低，因此称为“技术”效率。技术效率可以从投入和产出两个角度来衡量，在投入既定的情况下，技术效率由产出最大化的程度来衡量；在产出既定的情况下，技术效率由投入最小化的程度来衡量（Farrell, 1957）。

技术效率可通过产出/投入的比值来定量的测量。当生产过程仅涉及一种投入和一种产出时，可以计算各生产单元的产出/投入比值，即每消耗一个单位的投入所生产的产品数量，来反映各生产单元技术效率的高低。如果将各单元的产出/投入比值除以其中的最大值，就可以将产出/投入比值标准化为0~1的数值，这样可以更好地反映被评价单元与最优单元之间技术效率的差距（见表2-1）。

表2-1 用产出/投入比值测量技术效率

单位	$x$ (投入)	$y$ (产出)	$y/x$	$y/x$ (标准化)
A	10	10	0.800	1.000
B	15	10	0.800	1.000
C	32	16	0.500	0.625
D	48	16	0.375	0.469
E	24	16	0.500	0.625
F	54	18	0.370	0.463
G	50	20	0.400	0.500

上述方法虽然简单，但仅适用于单投入、单产出的情况，如果生产过程涉及的投入或产出不止一项，则无法直接计算单一的比值。在这种情况下，对各投入和产出指标赋予一定的权重，然后计算加权产出/加权投入的比值，可作为反映技术效率的指数。

假设有  $m$  种投入和  $q$  种产出，则加权投入表示为

$$v = v_1x_1 + v_2x_2 + \cdots + v_mx_m \quad (2-1)$$

加权产出表示为

$$u = u_1y_1 + u_2y_2 + \cdots + u_qy_q \quad (2-2)$$

接下来的问题是如何确定反映各项投入和产出之间相对重要程度的权重系数。一种方法是采用固定的权重，例如通过专家咨询或研讨等主观的形式确定各项指标的权重；另一种方法是通过数据本身获得投入和产出的权重，数据包络分析就是采用这种方法。

## 2.2 基于规模收益不变的 CCR 模型

1978 年 Charnes、Cooper 和 Rhodes 三人在《欧洲运筹学杂志》(*European Journal of Operational Research*) 上发表了论文“Measuring the efficiency of decision making units”，创立了 DEA 理论方法 (Charnes A, et al., 1978)。在后来的 DEA 文献中，以 Charnes、Cooper 和 Rhodes 三人姓氏的首字母来命名他们创立的第一个 DEA 模型，即 CCR 模型。CCR 模型假设规模收益不变 (Constant Returns to Scale, CRS)，其得出的技术效率包含了规模效率的成分，因此通常被称为综合技术效率。

DEA 将效率的测度对象称为决策单元 (Decision Making Unit, DMU)，DMU 可以是任何具有可测量的投入、产出 (或输入、输出) 的部门、单位，如厂商、学校、医院、项目执行单位 (区域)，也可以是个人，如教师、学生、医生等。DMU 之间须具有可比性。

### 2.2.1 投入导向 CCR 模型的规划式

上节中谈到可以通过计算产出投入比来测量技术效率，现在接着这个话题来阐述 DEA 的基本原理。假设我们要测量一组共  $n$  个 DMU 的技术效率，记为  $DMU_j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ )；每个 DMU 有  $m$  种投入，记为  $x_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ )，投入的权重表示为  $v_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ )； $q$  种产出，记为  $y_r$  ( $r=1, 2, \dots, q$ )，产出的权重表示为  $u_r$  ( $r=1, 2, \dots, q$ )。当前要测量的 DMU 记为  $DMU_k$ ，其产出投入比表示为

$$h_k = \frac{u_1 y_{1k} + u_2 y_{2k} + \dots + u_q y_{qk}}{v_1 x_{1k} + v_2 x_{2k} + \dots + v_m x_{mk}} = \frac{\sum_{r=1}^q u_r y_{rk}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ik}} \quad (v \geq 0; u \geq 0) \quad (2-3)$$

接下来给要测量的技术效率值附加一项条件，将所有 DMU 采用上述权重得出的效率值  $\theta_j$  限定在  $[0, 1]$  的区间内，即

$$\frac{\sum_{r=1}^q u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \leq 1 \quad (2-4)$$

Charnes、Cooper 和 Rhodes 三人创立的第一个 DEA 模型，是基于规模收益不变，其线性规划模型表示为

$$\begin{aligned}
 & \max \frac{\sum_{r=1}^q u_r y_{rk}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ik}} \\
 & \text{s. t. } \frac{\sum_{r=1}^q u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \leq 1 \\
 & v \geq 0; u \geq 0 \\
 & i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n \quad (2-5)
 \end{aligned}$$

这一非线性规划模型的含义在于，在使所有 DMU 的效率值都不超过 1 的条件下，使被评价 DMU 的效率值最大化，因此模型确定的权重  $u$  和  $v$  是对被评价 DMU<sub>k</sub> 最有利的。从这个意义上讲，CCR 模型是对被评价 DMU 的无效率状况作出的一种保守的估计，因为它采用的权重是最有利于被评价者的，采用其他任何权重得出的效率值都不会超过这组权重得出的效率值。

为什么说 CCR 模型是基于规模收益不变的呢？假设一项生产技术的规模收益不变，则在技术效率保持不变的条件下，如果一个 DMU 的投入变为原来的  $t$  倍 ( $t > 0$ )，其产出也会相应变为原来的  $t$  倍。反过来说，假设被评价 DMU<sub>k</sub> 的投入和产出都变为原来的  $t$  倍，在规模收益不变假设下，其技术效率应保持不变。那么 CCR 模型在这种情况下得出的技术效率是否是保持不变的呢？

DMU<sub>k</sub> 的投入和产出都变为原来的  $t$  倍后，CCR 模型的目标函数为

$$\max \frac{\sum_{r=1}^q u_r t y_{rk}}{\sum_{i=1}^m v_i t x_{ik}} = \frac{t \sum_{r=1}^q u_r y_{rk}}{t \sum_{i=1}^m v_i x_{ik}} = \frac{\sum_{r=1}^q u_r y_{rk}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ik}} \quad (2-6)$$

由于  $t$  同时存在于分子和分母，约掉后与原来的目标函数等价。同理，与 DMU<sub>k</sub> 对应的约束也与原来的约束等价。因此，当被评价 DMU<sub>k</sub> 的投入和产出都增加为原来的  $t$  倍时，CCR 模型与原模型等价，得出的效率值不变，与规模收益不变的假设相符。

式 (2-5) 所示的 CCR 模型存在的问题是它是非线性规划，并且存在无穷多个最优解。假设向量  $u^*$  和  $v^*$  是模型 (2-5) 的一个最优解<sup>①</sup>，则  $tu^*$  和  $tv^*$  肯定也是模型 (2-5) 的最优解 ( $t > 0$ )。

由于  $\sum_{i=1}^m v_k x_{ij} > 0$ ，模型 (2-5) 的约束等价于

$$\text{s. t. } \sum_{r=1}^q u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0 \quad (2-7)$$

① 在本书中，采用在变量加上标 \* 的方式表示线性规划中该变量的解。

令  $t = \frac{1}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ik}}$ ，则模型 (2-5) 的目标函数变为

$$\max t \sum_{r=1}^q u_r y_{rk} = \sum_{r=1}^q t u_r y_{rk} \quad (2-8)$$

再令  $\mu = t u$ ， $\nu = t v$ ①，非线性模型 (2-5) 变换为等价的线性规划模型

$$\begin{aligned} \max & \sum_{r=1}^q \mu_r y_{rk} \\ \text{s. t.} & \sum_{r=1}^q \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m \nu_i x_{ij} \leq 0 \\ & \sum_{i=1}^m \nu_i x_{ik} = 1 \\ & \nu \geq 0; \mu \geq 0 \\ & i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2-9)$$

模型 (2-9) 是以求解 DMU<sub>k</sub> 为例来表述投入导向 CCR 模型的线性规划，对于每个 DMU 都要分别建立规划式。以表 2-2 中的数据为例，需分别求解 4 个线性规划模型，从 A 到 D 依次为

#### DMU A

$$\begin{aligned} \max & +10 \text{ Weight\_ } y \\ \text{s. t.} & +10 \text{ Weight\_ } x_1 + 40 \text{ Weight\_ } x_2 = 1 \\ & -10 \text{ Weight\_ } x_1 - 40 \text{ Weight\_ } x_2 + 10 \text{ Weight\_ } y \leq 0 \\ & -15 \text{ Weight\_ } x_1 - 25 \text{ Weight\_ } x_2 + 10 \text{ Weight\_ } y \leq 0 \\ & -54 \text{ Weight\_ } x_1 - 27 \text{ Weight\_ } x_2 + 18 \text{ Weight\_ } y \leq 0 \\ & -50 \text{ Weight\_ } x_1 - 60 \text{ Weight\_ } x_2 + 20 \text{ Weight\_ } y \leq 0 \end{aligned}$$

#### DMU B

$$\begin{aligned} \max & +10 \text{ Weight\_ } y \\ \text{s. t.} & +15 \text{ Weight\_ } x_1 + 25 \text{ Weight\_ } x_2 = 1 \\ & -10 \text{ Weight\_ } x_1 - 40 \text{ Weight\_ } x_2 + 10 \text{ Weight\_ } y \leq 0 \\ & -15 \text{ Weight\_ } x_1 - 25 \text{ Weight\_ } x_2 + 10 \text{ Weight\_ } y \leq 0 \\ & -54 \text{ Weight\_ } x_1 - 27 \text{ Weight\_ } x_2 + 18 \text{ Weight\_ } y \leq 0 \\ & -50 \text{ Weight\_ } x_1 - 60 \text{ Weight\_ } x_2 + 20 \text{ Weight\_ } y \leq 0 \end{aligned}$$

#### DMU C

$$\begin{aligned} \max & +18 \text{ Weight\_ } y \\ \text{s. t.} & +54 \text{ Weight\_ } x_1 + 27 \text{ Weight\_ } x_2 = 1 \\ & -10 \text{ Weight\_ } x_1 - 40 \text{ Weight\_ } x_2 + 10 \text{ Weight\_ } y \leq 0 \end{aligned}$$

① 注意等号前面使用的是希腊字母  $\mu$  和  $\nu$ ，等号后面使用的是英文字母  $u$  和  $v$ ，采用不同的字母是因为变换后的模型和之前的模型是两个不同的线性规划，虽然其目标函数最优解相等。

$$\begin{aligned} & -15 \text{ Weight\_ } x_1 - 25 \text{ Weight\_ } x_2 + 10 \text{ Weight\_ } y \leq 0 \\ & -54 \text{ Weight\_ } x_1 - 27 \text{ Weight\_ } x_2 + 18 \text{ Weight\_ } y \leq 0 \\ & -50 \text{ Weight\_ } x_1 - 60 \text{ Weight\_ } x_2 + 20 \text{ Weight\_ } y \leq 0 \end{aligned}$$

**DMU D**

$$\begin{aligned} & \max +20 \text{ Weight\_ } y \\ \text{s. t. } & +50 \text{ Weight\_ } x_1 + 60 \text{ Weight\_ } x_2 = 1 \\ & -10 \text{ Weight\_ } x_1 - 40 \text{ Weight\_ } x_2 + 10 \text{ Weight\_ } y \leq 0 \\ & -15 \text{ Weight\_ } x_1 - 25 \text{ Weight\_ } x_2 + 10 \text{ Weight\_ } y \leq 0 \\ & -54 \text{ Weight\_ } x_1 - 27 \text{ Weight\_ } x_2 + 18 \text{ Weight\_ } y \leq 0 \\ & -50 \text{ Weight\_ } x_1 - 60 \text{ Weight\_ } x_2 + 20 \text{ Weight\_ } y \leq 0 \end{aligned}$$

表 2-2 线性规划式示例数据

DMU	$x_1$	$x_2$	$y$
A	10	40	10
B	15	25	10
C	54	27	18
D	50	60	20

模型 (2-9) 的对偶模型为<sup>①</sup>

$$\begin{aligned} & \min \theta \\ \text{s. t. } & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{ik} \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{rk} \\ & \lambda \geq 0 \\ & i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2-10)$$

对偶模型 (2-10) 中,  $\lambda$  表示 DMU 的线性组合系数, 模型的最优解  $\theta^*$  代表效率值,  $\theta^*$  的范围为  $(0, 1]$ 。

$(x = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j, y = \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j)$  可以看做是一个虚拟的 DMU, 其投入不高于 DMU<sub>k</sub> 的投入, 产出不低于 DMU<sub>k</sub> 的产出。如果 DMU<sub>k</sub> 处于无效率的状态, 则最优解构建的虚拟 DMU ( $\hat{x} = \sum_{j=1}^n \lambda_j^* x_j, \hat{y} = \sum_{j=1}^n \lambda_j^* y_j$ ) 就是被评价 DMU<sub>k</sub> 的目标值。

模型的目标函数最优解为  $\theta^*$ ,  $1 - \theta^*$  表示在当前技术水平下, 被评价 DMU<sub>k</sub> 在不降低产出水平的条件下, 其投入能够缩减的最大限度。 $\theta^*$  越小, 表示投入可以缩减的幅度越大, 效率越低。 $\theta^* = 1$  时说明被评价 DMU 位于前沿面上, 在不

① 原模型与对偶模型之间的转换关系请参阅相关教材。例如, Hillier F S, Lieberman G J. Introduction to Operations Research. McGraw-Hill Higher Education, 2010.



减少产出的条件下, 其各项投入没有等比例下降的空间, 处于技术有效的状态;  $\theta^* < 1$  说明被评价 DMU 为技术无效率状态, 在不减少产出的条件下, 其各项投入可以等比例下降的比例为  $(1 - \theta^*)$ 。

在模型 (2-9) 中, 投入和产出权重系数与投入和产出在形式上是乘数和被乘数的关系, 模型 (2-9) 通常称为 DEA 的乘数形式 (Multiplier Form)。其对偶模型 (2-10) 确定的前沿为形似包络, 将所有 DMU 包裹在内 (详见 2.2.3 节的图解), 通常称为 DEA 的包络形式 (Envelopment Form)。

CCR 对偶模型 (2-10) 是以产出既定的条件下, 各项投入可以等比例缩减的程度来对无效率的状况进行测量, 因此被称为投入导向的 CCR 模型。

### 2.2.2 产出导向 CCR 模型的规划式

产出导向 CCR 模型的规划式为

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^m \nu_i x_{ik} \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m \nu_i x_{ij} \leq 0 \\ & \sum_{r=1}^q \mu_r y_{rk} = 1 \\ & \nu \geq 0; \mu \geq 0 \\ & i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2-11)$$

其对偶模型为

$$\begin{aligned} \max \quad & \varphi \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_{ik} \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq \varphi y_{rk} \\ & \lambda \geq 0 \\ & i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2-12)$$

对偶模型 (2-12) 是以投入既定的条件下, 各项产出可以等比例增长的程度来对无效率的状况进行测量, 因此被称为产出导向的 CCR 模型。

模型的最优解为  $\varphi^*$ 。在当前技术水平下, 被评价 DMU<sub>k</sub> 在不增加投入的条件下, 其产出能够增长的最大比例为  $\varphi^* - 1$ 。 $\varphi^*$  越大, 表示产出可以增长的程度越大, 效率越低。由于  $\varphi^* \geq 1$ , 所以一般采用  $1/\varphi^*$  表示效率值<sup>①</sup>。

### 2.2.3 投入导向 CCR 模型图解

我们下面以图示的方式来展示投入导向 CCR 模型的基本原理。假设有 7 个 DMU (见表 2-3), 均有 2 种投入 ( $x_1$ 、 $x_2$ ) 和 1 种产出 ( $y$ )。以单位产出消耗

① 在 MaxDEA 软件的分析结果中, 产出导向模型的效率值 (Efficiency Score) =  $1/\varphi^*$ 。

的投入  $x_1$  的数量为横坐标 ( $x_1/y$ ), 以单位产出消耗的投入  $x_2$  的数量为纵坐标 ( $x_2/y$ ), 各 DMU 单位产出的投入情况可用图 2-1 来表示。

表 2-3 投入导向 CCR 模型示例数据

DMU	$x_1$	$x_2$	$y$	$x_1/y$	$x_2/y$
A	10	40	10	1.00	4.00
B	15	25	10	1.50	2.50
C	32	24	16	2.00	1.50
D	48	16	16	3.00	1.00
E	24	48	16	1.50	3.00
F	54	27	18	3.00	1.50
G	50	60	20	2.50	3.00

在图 2-1 中, DMU 可用坐标系内的点表示。从被评价 DMU 的坐标点分别向两个坐标轴作垂线, 在两条垂线与坐标轴围成的区域内 (含边界), 任意点的坐标值均小于或等于被评价 DMU 的坐标值。以 G 点为例, 阴影区域  $GQOP$  内所有点的坐标值, 记为点  $M(m_1, m_2)$ , 均小于或等于 G 点的坐标, 记为  $G(g_1, g_2)$ , 即  $m_1 \leq g_1, m_2 \leq g_2$ 。在处于该区域内所表示的 DMU 与 G 点相比, 其每生产一个

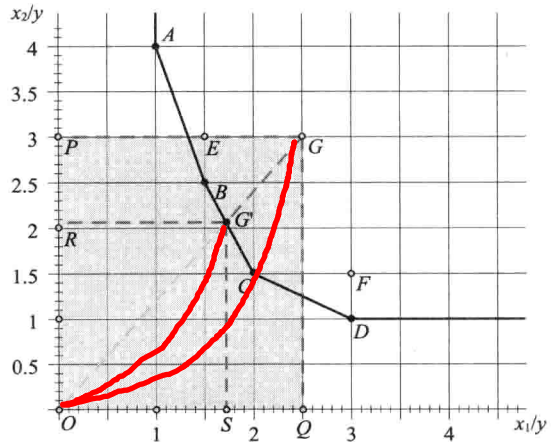


图 2-1 投入导向 CCR 模型基本原理图示

一个单位的产出所消耗的两种投入的数量均小于或等于 G 点的消耗 (仅当 M 点与 G 点重合时, 两者相等)。这表示, 在该区域内除 G 点自身外, 所有点的技术效率均高于 G 点, 从图中可以看出, 在 7 个 DMU 中, B、C、E 三个点与 G 点相比, 效率更高。

在 7 个 DMU 中, 有 4 个 DMU (A、B、C、D), 在其垂线与坐标轴围成的区域内, 均没有包含任何其他 DMU 或其他 DMU 的线性组合, 这表示 A、B、C、D 处于技术效率的前沿上, 4 点连接构成的曲线及其延长线称为效率前沿, 位于前沿的 DMU 其效率为 1, 被前沿包裹的 DMU 效率为 0~1。从形状上看, 前沿凸向原点, 形似包络, 包裹着所有 DMU。在多维空间中, 投入导向 CCR 模型的前沿为凸向原点的凸多面体的顶面。

这就是为什么将这一分析方法称为数据包络分析的原因所在。

以 G 点为例, G 点 ( $g_1, g_2$ ) 与坐标原点  $O(0, 0)$  的连线和前沿曲线的交

点记为  $G'$  ( $g'_1, g'_2$ )， $G'$ 称为  $G$  点在前沿上的投影 (projection)。  $G$  点与处于前沿曲线上的  $G'$  点相比，其每生产一个单位的产出所多消耗的两种投入的数量分别为  $g_1 - g'_1$  和  $g_2 - g'_2$ ，多消耗的比例分别为  $(g_1 - g'_1) / g_1$  和  $(g_2 - g'_2) / g_2$ ，有效消耗的比例分别为  $1 - (g_1 - g'_1) / g_1 = g'_1 / g_1$  和  $1 - (g_2 - g'_2) / g_2 = g'_2 / g_2$ 。上述两个比例用坐标内的线段来表示分别为  $RG' / PG$  和  $SG' / QG$ 。根据几何定理可知  $RG' / PG = SG' / QG = OG' / OG$ 。  $G$  点的效率值可表示为  $OG' / OG$ 。  $G$  点的效率部分体现为  $OG'$ ，无效率部分体现为  $GG'$ 。

从 DEA 基本原理的图示可以看出，DEA 测度的效率为相对效率，是被评价 DMU 相对于“领先” DMU 的效率，DEA 得出的效率值是被评价 DMU 与处于前沿上的投影点相对比较得出的。

#### 2.2.4 产出导向 CCR 模型图解

假设有 7 个 DMU (见表 2-4)，均有 1 种投入和 2 种产出 ( $y_1$  和  $y_2$ )。以单位投入所生产的产出  $y_1$  的数量为横坐标 ( $y_1/x$ )，以单位投入所生产的产出  $y_2$  的数量为纵坐标 ( $y_2/x$ )。各 DMU 单位投入的产出情况可用图 2-2 来表示。

表 2-4 产出导向 CCR 模型示例数据

DMU	$x_1$	$x_2$	$y$	$y_1/x$	$y_2/x$
A	10	10	40	1.00	4.00
B	10	25	35	2.50	3.50
C	16	48	40	3.00	2.50
D	16	64	16	4.00	1.00
E	16	32	48	2.00	3.00
F	18	54	27	3.00	1.50
G	20	20	40	1.00	2.00

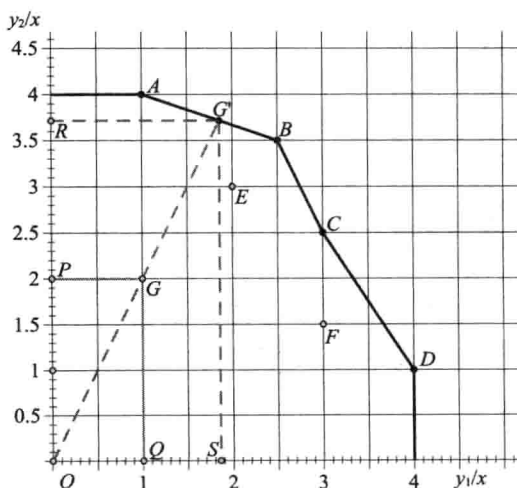


图 2-2 产出导向 CCR 模型基本原理图示

以  $G$  点为例, 坐标原点  $O$  与  $G$  点连线的延长线与前沿曲线的交点记为  $G'$ ,  $G'$  称为  $G$  点在前沿上的投影。每消耗一个单位的投入,  $G'$  点产量与  $G$  点产量的比值分别为  $RG'/PG$  和  $SG'/QG$ , 根据几何定理可知  $RG'/PG = SG'/QG = OG'/OG$ 。 $G$  点的效率状况可表示为  $\varphi = OG'/OG$ 。由于  $\varphi$  的取值范围为  $[1, \infty)$ , 在实际应用中一般采用  $\varphi$  的倒数作为效率值,  $\theta = 1/\varphi = OG/OG'$ ,  $\theta$  取值范围为  $(0, 1]$ 。

在多维空间中, 产出导向 CCR 模型的前沿为凹向原点的凸多面体的顶面。

## 2.3 基于规模收益可变的 BCC 模型

CCR 模型假设生产技术的规模收益不变, 或者虽然生产技术规模收益可变, 但假设所有被评价 DMU 均处于最优生产规模阶段, 即处于规模收益不变阶段。但实际生产中, 许多生产单位并没有处于最优规模的生产状态, 因此 CCR 模型得出的技术效率包含了规模效率的成分。1984 年 Banker、Charnes 和 Cooper 三人在 *Management Science* 杂志上发表了“Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis”, 提出了估计规模效率的 DEA 模型 (Banker, et al., 1984)。这一方法的提出对于 DEA 理论方法具有重要的意义, 在以后的文献中将此模型称为 BCC 模型 (以三位作者的姓氏首字母命名)。BCC 模型基于规模收益可变 (Variable Returns to Scale, VRS), 得出的技术效率排除了规模的影响, 因此称为“纯技术效率” (Pure Technical Efficiency, PTE)。

### 2.3.1 投入导向 BCC 模型的规划式

BCC 模型是在 CCR 对偶模型的基础上增加了约束条件  $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 (\lambda \geq 0)$  构成的, 其作用是使投影点的生产规模与被评价 DMU 的生产规模处于同一水平。

$$\begin{aligned}
 & \min \theta \\
 \text{s. t. } & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{ik} \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{rk} \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\
 & \lambda \geq 0 \\
 & i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n \quad (2-13)
 \end{aligned}$$

BCC 模型 (2-13) 的对偶规划式为<sup>①</sup>

$$\max \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rk} - \mu_0$$

①  $\mu_0$  是自由变量, 取值范围为  $(-\infty, +\infty)$ , 因此在线性规划式中  $\mu_0$  前面的符号是正号还是负号, 不影响目标函数的结果。与原文献 (Banker, et al., 1984) 保持一致, 本书中采用负号。

$$\begin{aligned}
 \text{s. t. } & \sum_{r=1}^q \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m \nu_i x_{ij} - \mu_0 \leq 0 \\
 & \sum_{i=1}^m \nu_i x_{ik} = 1 \\
 & v \geq 0; u \geq 0; u_0 \text{ free} \\
 & i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n \quad (2-14)
 \end{aligned}$$

### 2.3.2 产出导向 BCC 模型的规划式

产出导向 BCC 模型的规划式为

$$\begin{aligned}
 \min & \phi \\
 \text{s. t. } & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_{ik} \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq \phi y_{rk} \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\
 & \lambda \geq 0 \\
 & i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n \quad (2-15)
 \end{aligned}$$

产出导向 BCC 模型也是在产出导向 CCR 模型 (2-12) 的基础上增加了约束条件  $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$  构成的, 其对偶规划式为

$$\begin{aligned}
 \min & \sum_{i=1}^m \nu_i x_{ik} + \nu_0 \\
 \text{s. t. } & \sum_{r=1}^q \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m \nu_i x_{ij} - \nu_0 \leq 0 \\
 & \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rk} = 1 \\
 & \nu \geq 0; \mu \geq 0; \nu_0 \text{ free} \\
 & i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n \quad (2-16)
 \end{aligned}$$

### 2.3.3 投入导向 BCC 模型图解

下面以图示的方式来展示投入导向 BCC 模型的基本原理。假设有 4 个 DMU (见表 2-5), 均有 1 种投入 ( $x$ ) 和 1 种产出 ( $y$ )。以投入  $x$  为横坐标, 以产出  $y$  为纵坐标, 各 DMU 的投入产出情况如图 2-3 所示。

表 2-5 投入导向 BCC 模型示例数据

DMU	$x$	$y$
A	1.00	1.00
B	1.50	2.00
C	3.50	2.50
D	4.00	3.00

假设规模收益不变, 生产前沿可用  $OB$  射线表示,  $B$  是唯一有效 DMU。假设规模收益可变, 则生产前沿为  $MABD$  构成的凸向左侧的曲线。在 CRS 模型中,  $B$  点的产出投入比最高,  $A$ 、 $C$ 、 $D$  三点与  $B$  点相比, 均处于无效率状态, 其中  $A$  点的投影处于  $OB$  上,  $\lambda$  小于 1;  $C$ 、 $D$  两点的投影处于  $OB$  延长线上,  $\lambda$  大于 1。而在 VRS 模型中, 受到约束  $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$  的限制,  $A$ 、 $C$ 、 $D$  三点均无法向  $OB$

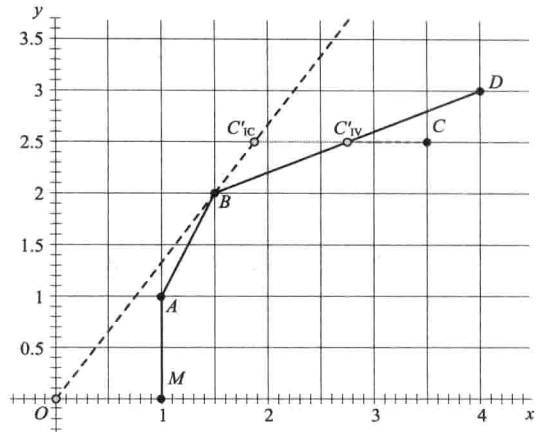


图 2-3 投入导向 BCC 模型基本原理图示

射线上作投影, 因为他们在  $OB$  射线上的投影点要么  $\sum_{j=1}^n \lambda_j < 1$ , 要么  $\sum_{j=1}^n \lambda_j > 1$ , 无法满足  $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$  的条件。约束  $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$  使得生产前沿往后退缩, 并使  $A$ 、 $D$  两点处于前沿上,  $ABD$  及  $A$  点垂直向下的延长线构成了生产前沿曲线。VRS 模型中  $C$  点为无效 DMU, 其投入无效率体现为  $CC'_{IV}$ , 而在 CRS 模型中其投入无效率体现为  $CC'_{IC}$ 。

### 2.3.4 产出导向 BCC 模型图解

下面再以图示的方式来展示产出导向 BCC 模型的基本原理。同样以表 2-5 的数据为例, 在 CRS 模型中, 产出导向与投入导向的前沿相同, 也是  $OB$  射线。但是在 VRS 模型中, 产出导向的前沿与投入导向的前沿并不完全相同, 产出导向的生产前沿曲线为  $ABD$  及  $D$  点平行于  $x$  轴的延长线 (见图 2-4)。  $C$  点在前沿上的投影则完全不同, 其无效率体现为  $CC'_{OV}$ , 而在 CRS 模型中其投入无效率体现为  $CC'_{OC}$ 。

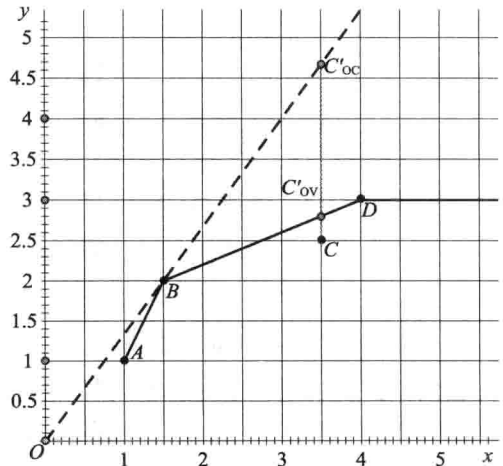


图 2-4 产出导向 BCC 模型基本原理图示

## 2.4 FDH 模型

FDH 模型是由 Tulkens 在 1993 年提出的一种混合整数线性规划 (Mixed Integer Linear Programming, MILP) 模型。从规划式上看, FDH 模型可以看做是在

VRS DEA 模型的基础上, 将线性组合系数  $\lambda$  限定为 0 或 1, 即  $\lambda \in \{0, 1\}$ 。FDH 模型的全称是 Free Disposal Hull, 直接含义为自由处置壳 (包)。FDH 这一名称主要体现的是 Free Disposal 的含义, 即在生产可能集中投入和产出的可自由处置性 (强可处置)。

以投入导向模型为例, FDH 模型表示为

$$\begin{aligned} & \min \theta \\ \text{s. t. } & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{ik} \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{rk} \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\ & \lambda \in \{0, 1\} \\ & i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2-17)$$

由于模型中约束  $\lambda \in \{0, 1\}$ , FDH 模型的前沿不再是凸包, 其外形如图 2-5 所示, 虚线为 VRS DEA 模型前沿, 实线为 FDH 前沿。

从图中可以看出, FDH 模型的生产可能集是 VRS DEA 模型的子集。在 FDH 模型中, 被评价 DMU 的参考标杆只能有一个 DMU, 并且其线性组合系数  $\lambda = 1$ 。其意义在于被评价 DMU 仅参考现实中实际存在的 DMU, 不会参考线性组合而成的虚拟 DMU。这是 FDH 模型在实际应用中的意义。

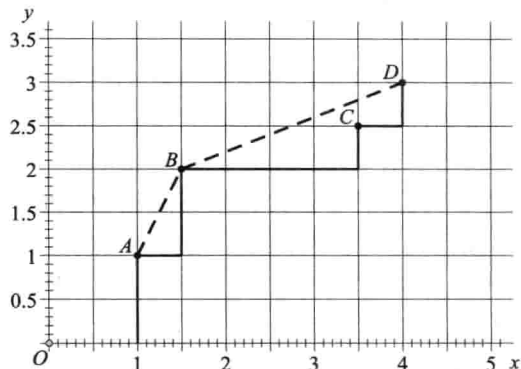


图 2-5 FDH 模型基本原理图示 (投入导向)

## 2.5 投入导向和产出导向效率值的关系

在 CRS 模型中, 投入导向和产出导向得出的效率值相等, 这一点可通过图 2-6 来说明。C 点的效率值, 在投入导向模型中 ( $\theta^*$ ) 可表示为  $QC'_{1c}/QC$ , 在产出导向模型中 ( $1/\varphi^*$ ) 可表示为  $NC/NC'_{oc}$ 。通过三角几何定理很容易证明  $C'_{1c}C/QC = CC'_{oc}/NC'_{oc}$ , 然后即可得出  $QC'_{1c}/QC = NC/NC'_{oc}$ 。但是在 VRS 模型中, 不存在这样的关系, 即 VRS 模型中投入导向和产出导向的效率值不等。

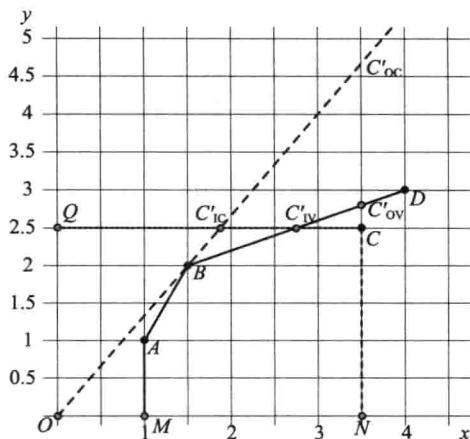


图 2-6 CRS 模型中投入导向与产出导向效率值的关系

## 2.6 规模效率问题

BCC 模型的提出是为了求解 VRS 生产技术下 DMU 的技术效率，但同时 BCC 模型也为计算规模效率提供了方法。如果生产技术是规模收益可变的，采用 CRS 模型得出的效率值（Technical Efficiency,  $TE$ ）并非纯粹的技术效率，而包含了规模效率的成分，这使得求解规模效率成为可能。对 VRS 生产技术而言，既然 VRS 模型得出的效率值才是技术效率（称为“纯技术效率”，Pure Technical Efficiency,  $PTE$ ），那么通过比较计算 CRS 效率值和 VRS 效率值就可以分离出规模效率值（Scale Efficiency,  $SE$ ），计算方法为  $SE = TE/PTE$ 。

在图 2-7 中投入导向的规模无效率体现为  $C'_{IV}C'_{IC}$ ，在图 2-8 中产出导向的规模无效率体现为  $C'_{OC}C'_{OV}$ 。

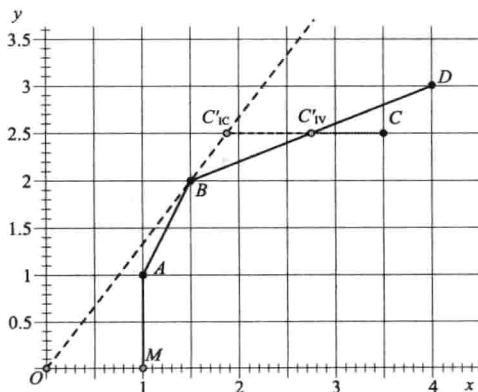


图 2-7 投入导向模型规模效率图示

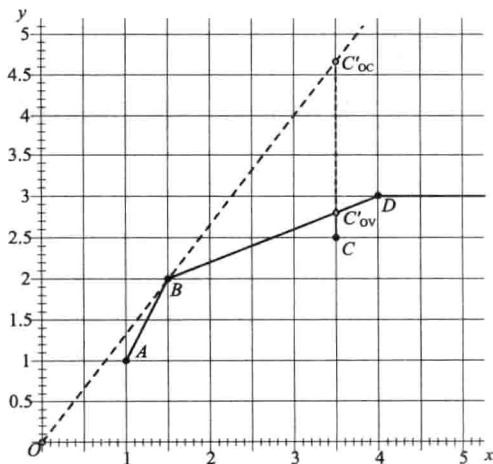


图 2-8 产出导向模型规模效率图示



需要注意的一点是,当生产技术为规模收益可变时才存在规模效率问题。在求解规模效率时,只是借用 CRS 模型(假设所研究的 DMU 处于 CRS 状态)来分离出规模效率。研究者需明确其中的逻辑关系。

## 2.7 DEA 模型的命名问题

CCR 模型标志着 DEA 方法的诞生,而 BCC 模型的提出对于 DEA 方法的发展也具有非常重要的意义。因此,这两个模型采用作者姓氏命名得到了 DEA 领域的一致认可。但是,随着 DEA 理论方法的快速发展,大量新的 DEA 方法不断出现,如果继续采用作者姓氏的方式进行命名,容易引起混乱。DEA 模型宜根据模型的主要特征命名。根据这样的命名方法,CCR 模型为 CRS 径向 DEA 模型;BCC 模型为 VRS 径向 DEA 模型。径向的含义是指无效率的测量方式为投入能够等比例减少的程度,或产出能够等比例增加的程度。为便于介绍更多的 DEA 模型,本书后面的章节中将不再使用 CCR 和 BCC 两个名称。

## 2.8 强有效、弱有效与松弛变量问题

为什么在 DEA 模型中有松弛变量呢?在径向 DEA 包络模型的线性规划式(2-10)和式(2-12),约束条件是以不等式的形式来表示的,而非等式。这可以看做是一种“松”的约束,这是松弛变量存在的基础<sup>①</sup>。

可以用一个生活中的问题来帮助理解径向 DEA 模型中的松弛变量。有多条长短不一的绳子,现在将所有绳子的一端固定在墙上,然后将所有绳子的另一端对齐后往外拉。当拉不动时,说明最短的一根绳子已经拉紧了,不能继续拉了。但是,这时其他绳子可能还是松的。如果放开已经拉紧的绳子,松弛的绳子还可以继续拉动,每根松弛的绳子可以继续拉动的距离就是各个指标的松弛变量值。

还可以从包络模型的线性空间中去理解松弛问题产生的原因。DEA 模型的前沿是由分段线性函数构成的,而分段线性函数在空间坐标系中会出现与坐标轴平行的情况,这是松弛问题产生的根源。

首先看一下单投入单产出的例子,仍以表 2-5 中的数据为例。在 CRS 模型中,单投入单产出的前沿为  $OB$  射线,不可能出现与坐标轴平行的情况,因此单投入单产出的 CRS 径向模型松弛变量肯定为 0,即不存在松弛问题。但是, VRS 前沿会出现与坐标轴平行的区段,如果某个 DMU 的投影落在平行区段内,则会存在松弛问题。例如,在表 2-5 数据的基础上增加一个  $S$  点 ( $x=2, y=0.5$ )。

① 在生产可能集理论中,DEA 模型的生产可能集表示为  $\left\{ (x, y) \mid x \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}, y \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{ij}; i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n \right\}$  这种采用不等号的“松”的约束代表着投入和产出的可自由处置性,其含义为:如果投入  $x$  能生产产出  $y$ , 则更多的投入  $x + \Delta x$  也可以生产  $y$ ; 如果投入  $x$  能生产产出  $y$ , 则投入  $x$  也可以生产更少的产出  $y - \Delta y$ 。

在投入导向 VRS 径向模型中,  $S$  点在前沿的投影点为  $S'$ , 但是  $S'$  点与前沿上的  $A$  点相比,  $S'$  产出不足 (即  $S'A$  段), 存在松弛问题 (见图 2-9)。

在多投入多产出的情况下, 无论是 CRS 模型还是 VRS 模型都会出现松弛问题。图 2-10 显示了在两项投入和一项产出的投入导向 CRS 模型中, 存在松弛变量的问题。 $E$  点在前沿上的投影落在与坐标轴平行的区段内的  $E'$  上, 其单位产出的投入  $x_2/y$  存在的松弛为  $E'B$ 。

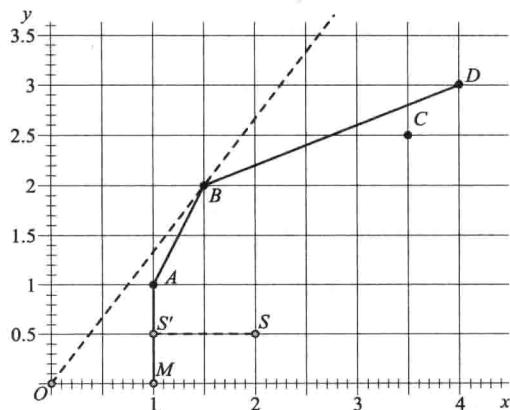


图 2-9 单投入单产出情况下  
CRS 模型中的松弛问题图解

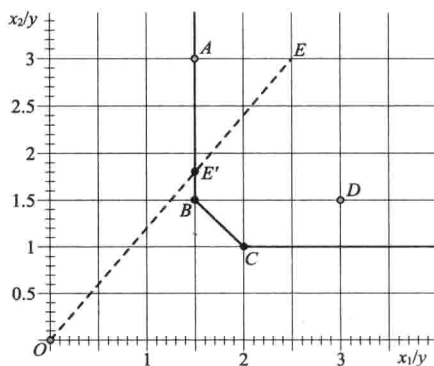


图 2-10 两投入一产出情况下  
CRS 模型中的松弛问题图解

在 DEA 模型中, 当 DMU 数量过少时, 会使构建的前沿面不够精细, 在被评价 DMU 的投影区域内, 更容易出现与坐标轴平行的区段, 从而出现松弛问题。

求解松弛变量值可以有多种方法。以投入导向的模型为例, 如果只是在模型的约束中增加松弛变量, 在目标函数中不增加松弛变量, 即

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta x_{ik} \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{rk} \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \end{aligned} \quad (2-18)$$

这种方法通常称为一阶段 (One Stage) 方法。在多数情况下, 一阶段方法一般能获得正确的松弛变量值 (见图 2-9), 但一阶段方法并不能保证一定能获得完全的松弛变量值。例如, 在图 2-10 中, 在  $E$  的投影点所处的平行于坐标轴的区段内存在两个 DMU, 这时, 采用一阶段方法无法求解出产出  $x_2/y$  的松弛变量。在求解 DEA 模型时, 如果用户只关心效率值, 可以选择一阶段方法。

为了解决一阶段方法获得的松弛变量值不完全的问题, 需要在模型的目标函数中增加投入和产出的松弛变量  $s^-$  和  $s^+$ 。以投入导向径向模型为例, 以模型 (2-18) 为基础, 在目标函数中增加松弛变量后的规划式为

$$\begin{aligned}
& \min \theta - \varepsilon \sum (s^- + s^+) \\
& \text{s. t. } \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta x_{ik} \\
& \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{rk} \\
& \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\
& \quad \lambda \geq 0; s^- \geq 0; s^+ \geq 0; \\
& \quad i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n \quad (2-19)
\end{aligned}$$

其中,  $\varepsilon$  为是一个常量, 表示非阿基米德无穷小, 可理解为一个足够小的正数, 在实际应用中可设置为 0.00001。  $\varepsilon$  设置不当会产生计算误差,  $\varepsilon$  数值设置过大时甚至会造成目标函数无边界。

模型 (2-19) 的乘数形式 (对偶模型) 为

$$\begin{aligned}
& \max \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rk} - \mu_0 \\
& \text{s. t. } \sum_{r=1}^q \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m \nu_i x_{ij} - \mu_0 \leq 0 \\
& \quad \sum_{i=1}^m \nu_i x_{ik} = 1 \\
& \quad \nu \geq \varepsilon; \mu \geq \varepsilon; \mu_0 \text{ free} \\
& \quad i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n \quad (2-20)
\end{aligned}$$

$\varepsilon$  数值设置过大时会造成对偶模型无可行解<sup>①</sup>。

为了消除包络模型 (2-19) 中  $\varepsilon$  产生的误差, 可采用两阶段 (Two Stage) 方法求解投入和产出松弛变量 (Ali & Seiford, 1993)。

在第一阶段, 求解模型 (2-13); 然后在第二阶段, 求解以下规划式:

$$\begin{aligned}
& \max \sum (s^- + s^+) \\
& \text{s. t. } \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta^* x_{ik} \\
& \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{rk} \\
& \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\
& \quad \lambda \geq 0; s^- \geq 0; s^+ \geq 0 \\
& \quad i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n \quad (2-21)
\end{aligned}$$

$\theta^*$  表示在第一阶段取得的  $\theta$  的最优解。

在图 2-9 中, 产出  $y$  的松弛变量为 0.5。在图 2-10 中, 产出  $x_2/y$  的松弛

① 根据对偶理论, 原模型如果目标函数无边界, 则其对偶模型无可行解。

变量为 0.3。

在产出导向模型中，也可以通过类似方式求解松弛问题。

通过 DEA 模型可以得出被评价 DMU 的效率状态：有效（率）还是无效（率）。DEA 有效分为两种情况。

一是强有效（Strong Efficiency）。它是指生产处于这样的一种状态，任何一项投入的数量都无法减少，除非减少产出的数量或增加另外一种投入的数量；任何一项产出的数量都无法增加，除非增加投入的数量或减少另外一种产出的数量。这种生产状态是一种帕雷托（Pareto）最优状态。在径向 DEA 模型中，判断是否为强有效的标准是  $\theta^* = 1$ ，并且  $s^{-*}$  和  $s^{+*}$  均为 0。

另外一种弱有效（Weak Efficiency）。它是指无法等比例减少各项投入的数量，除非减少产出的数量；无法等比例增加各项产出的数量，除非增加投入的数量。在这种生产状态下，虽然不能等比例减少投入或增加产出，但是某一项或几项（但不是全部）投入可能可以减少；或者某一项或几项（但不是全部）产出可能可以增加，因此这样的生产状态被称为弱有效。在径向 DEA 模型中，判断是否弱有效的标准是  $\theta^*$  是否等于 1，不需要考虑是否存在松弛问题。

是否有效和是否松弛是两个不同的问题。在径向 DEA 模型中，并不一定存在松弛问题，也可能出现所有松弛变量结果均为 0 的情况。

第一种情况是只有一种投入和一种产出的 CRS 模型。单投入单产出 CRS 模型的前沿为一个点，不存在与坐标轴平行的问题，所以也就不存在松弛问题。

第二种情况是所有无效 DMU 在前沿上的投影点均位于前沿上的强有效部分，在这种情况下，所有无效 DMU 的所有松弛变量结果也会全部为 0，不出现松弛问题。

## 2.9 比例改进与松弛改进的关系

无效 DMU 在前沿上的投影点代表其目标值。如果投入的改进值用负数表示，产出的改进值用正数表示，则被评价 DMU 的投入和产出目标值的计算方法可统一表示为：目标值 = 原始值 + 改进值。

无效 DMU 的改进值包括两部分，一是比例改进值（Proportionate Movement）<sup>①</sup>，二是松弛改进值（Slack Movement）<sup>②</sup>，即目标值 = 原始值 + 比例改进值 + 松弛改进值。

如果无效 DMU 仅完成比例改进，则该 DMU 改进后有可能是弱有效；如果存在松弛问题，则为弱有效；如果不存在松弛问题，则为强有效。只有完成比例改

① 在径向模型中，比例改进值一般称为径向改进值（Radial Movement），表示各项投入（或产出）等比例改进的数量。但在方向距离函数模型中的，这一部分改进并非等比例改进，而是按照方向向量的方向改进。为统一这部分改进值的名称，在 MaxDEA 软件的分析结果中，将其统称为比例改进值。

② 注意计算强有效目标值，在 Options 中，松弛变量计算方式（Slack Computation）建议选择两阶段方法。否则，计算得出的弱有效目标值实际上有可能是弱有效，虽然概率很低。

进和松弛改进后,才能保证无效 DMU 变为强有效。

以图 2-11 为例,  $D$  为无效 DMU。当完成比例改进后,由  $D$  点转移到前沿上的  $C$  点。由于  $C$  点处于前沿的强有效部分,不存在松弛问题,所以  $D$  在完成比例改进后即为强有效。 $E$  也是无效 DMU,当完成比例改进后,由  $E$  点转移到前沿上的  $E'$  点。由于  $E'$  点处于前沿的弱有效部分(与坐标轴平行的部分),存在松弛问题,所以  $E$  在完成比例改进后仅为弱有效。在此基础上,再完成松弛改进后,由  $E'$  点转移到  $B$  点,这时才为强有效。

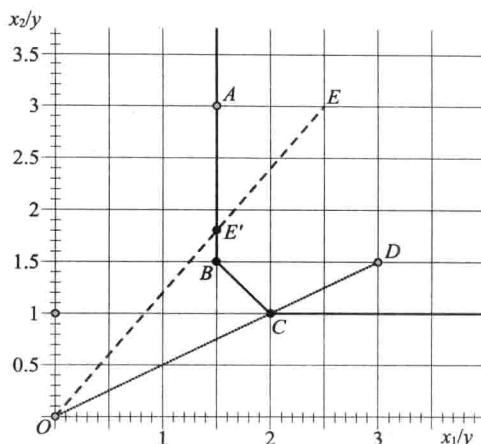


图 2-11 两投入一产出情况下  
CRS 模型中的松弛问题图解

## 2.10 DMU 数量、投入产出指标和模型导向的选择

### 2.10.1 DEA 模型对 DMU 数量的要求

DEA 为非参数前沿分析方法,虽然相对于参数方法,DEA 对 DMU 数量的要求相对较少,但是,如果 DMU 数量过少,例如,DMU 的数量比投入产出指标的数量还要少 ( $n < m + q$ ),则很容易出现大部分甚至全部 DMU 均有效的结果,使 DEA 失去对 DMU 效率进行区分的能力。一般来说,DMU 的数量不应少于投入和产出指标数量的乘积,同时不少于投入和产出指标数量的 3 倍 (Cooper William W, et al., 2007),即

$$n \geq \max \{ m \times q, 3 \times (m + q) \}$$

但这只是一个粗略的指导性原则,具体要根据 DEA 分析结果来判断。在实际应用中,往往 DMU 数量是固定的,当模型区分能力不足时,只能通过减少投入或产出指标数量来提高区分度。

### 2.10.2 投入和产出指标的选择

从生产可能集的角度考虑,DEA 模型的投入指标 ( $x$ ) 和产出指标 ( $y$ ) 应大致满足以下关系:

- (1)  $x$  能生产  $y$ ;
- (2)  $y$  是由  $x$  生产出来的。

在实际应用中,应注意区分投入产出指标与效率(或生产率)影响因素的不同。以医院为例,其主要产出指标是门急诊和住院服务,主要投入指标包括卫生技术人员、床位及其他医疗设备设施等。当前正在进行的医药卫生体制改革会对医院的效率(或生产率)产生影响,但是医改是效率(或生产率)的外部影

响因素，并非投入指标。

DEA 不要求投入指标或产出指标之间不存在高度相关性（共线性），共线性的存在不会导致错误的分析结果。实际上，在许多生产实践中，往往客观上就要求两种（或两种以上）生产要素要按一定比例投入。以医院为例，医生和护士的比例就存在着一个合理的范围，在实际数据中，医生的数量和护士的数量存在高度相关性。

但是，在指标数量较多而造成模型区分能力不足时，从尽量减少投入产出指标数量并尽可能包含更多的生产要素的角度出发，可首先考虑从模型中排除高度相关的指标。

DEA 模型是基于生产可能集理论的线性规划方法，生产可能集是 DMU 的线性组合，从理论上讲，DEA 模型中的投入和产出指标必须可以线性相加。率（或比值）是由分子指标和分母指标相除得出的，如果各 DMU 的率指标的分母数值不同（实际应用中，往往是不同的），就会产生错误的生产可能集，还可能会产生不合逻辑的结果（Emrouznejad A & Amin, 2009）。例如，反映卫生体系投入和产出的指标有很多是率或比值的形式，如卫生总费用占 GDP 的比例、服务覆盖率、死亡率、发病率、患病率等。如果直接采用率作为投入或产出指标，在 CRS 模型中，投影分析的结果中可能会出现率的目标值大于 100% 的情况。虽然采用 VRS 模型可以避免出现这种问题（Hollingsworth & Smith, 2003），但是 VRS 模型仍然存在 DEA 模型确定的生产前沿处于生产可能集之外的问题（Emrouznejad A & Amin, 2009）。

在 VRS 模型中，当率指标的分母数值在各 DMU 之间差别不大时，可近似认为该率指标满足可线性相加的条件；或者由于不满足可线性相加而造成的误差为研究目的所允许时，该率指标可以作为投入或产出指标。

Emrouznejad A & Amin (2009) 建议，当投入或产出指标中存在率时，可以采用两种方法对这些指标进行处理。

以产出导向的 VRS 模型为例，第一种方法是将率的分子作为产出指标，而将率的分母作为投入指标，其线性规划为

$$\begin{aligned}
 & \max \varphi \\
 & \text{s. t. } X\lambda \leq x_0 \\
 & \quad Y\lambda \geq \varphi y_0 \\
 & \quad N\lambda \geq \varphi n_0 \\
 & \quad D\lambda \leq d_0 \\
 & \quad \sum_j \lambda_j = 1 \\
 & \quad \lambda \geq 0
 \end{aligned} \tag{2-22}$$

其中， $N$  和  $D$  分别表示率指标的分子和分母， $n_0$  和  $d_0$  分别表示被评价 DMU 该率指标的分子和分母。

第二种方法是在线性规划式的左边将率指标拆分为分子指标和分母指标，分别进行线性运算，但是在方程的右边不对被评价 DMU 的率指标进行拆分，其规划式为

$$\begin{aligned}
 & \max \varphi \\
 & \text{s. t } X\lambda \leq x_0 \\
 & \quad Y\lambda \geq \varphi y_0 \\
 & \quad \frac{N\lambda}{D\lambda} \geq \varphi r_0 \\
 & \quad \sum_j \lambda_j = 1 \\
 & \quad \lambda \geq 0
 \end{aligned} \tag{2-23}$$

其中,  $N$  和  $D$  分别表示率指标的分子和分母,  $r_0$  表示被评价 DMU 的率指标。

第一种方法的优点是保持了模型的线性规划, 缺点是增加了投入或产出指标的数量, 从而增加了对样本量的要求; 第二种方法的优点是没有增加投入和产出指标数量, 但模型变为非线性规划问题。这两种方法的前提都是必须获得率指标的分子和分母数据。

### 2.10.3 模型导向的选择

按照对效率的测量方式, DEA 模型可分为投入导向、产出导向和非导向。投入导向模型是从投入的角度对被评价 DMU 无效率程度进行测量, 关注的是在不减少产出的条件下, 要达到技术有效各项投入应该减少的程度; 产出导向模型是从产出的角度对被评价 DMU 无效率的程度进行测量, 关注的是在不增加投入的条件下, 要达到技术有效各项产出应该增加的程度; 非导向模型则是同时从投入和产出两个方面进行测量。

具体到本章中介绍的径向模型, 投入导向是指在产出既定的条件下, 各项投入可以等比例缩减的程度来对无效率的状况进行测量; 而产出导向则是在投入既定的条件下, 各项产出可以等比例增长的程度来对无效率的状况进行测量。在 DEA 模型中, “在产出既定的条件下” 实际意义是指 “在产出不减少的条件下”, 而 “在投入既定的条件下” 实际意义是指 “在不增加投入的条件下”。

模型导向的选择主要取决于分析目的。如果分析目的只是获得各单位的效率值, 上述三种导向均可。如果需要作进一步的投影分析, 从管理角度考虑, 如果把减少投入作为对无效率单位提高效率的主要途径, 应选择投入导向模型; 如果把增加产出作为提高效率的主要途径, 则应选择产出导向模型。导向的选择要结合分析的具体研究领域去理解。例如, 在卫生领域, 如果在卫生资源投入不足背景下, 选择投入导向模型会使得投影分析的结果不容易进行解释。因为在投入导向模型中, 根据投影分析的结果, 无效率的单位要达到有效率的状态, 其改进目标是减少投入, 这似乎与卫生资源投入不足的背景产生矛盾 (但实质上并不矛盾), 使得分析结果容易产生误解。另外, 在分析卫生服务效率时, 在需求不足背景下 (即需求是决定卫生服务产出数量的首要因素时), 选择产出导向模型, 会使得投影分析所确定的产出目标客观上难以实现, 从而失去实际指导意义 (成刚和钱振华, 2012)。

## 2.11 MaxDEA 求解 DEA 基础模型示例

本节利用实际数据来说明 MaxDEA 软件求解基础 DEA 模型的过程与结果。表 2-6 是 2011 年各省（市、自治区）医院的部分投入和产出指标。以床位数和卫生技术人员数作为投入指标，以诊疗人次数和入院人数作为产出指标，建立 DEA 模型。DEA 基础模型包括投入导向 CRS 模型、产出导向 CRS 模型、投入导向 VRS 模型和产出导向 VRS 模型 4 种径向 DEA 模型。为节省篇幅，本节仅对 CRS 模型进行详细演示。

表 2-6 各地区医院部分投入产出指标（2011 年）

地 区	床位数（个）	卫技人员数（人）	诊疗人次数（人次）	入院人数（人）
安 徽	140997	132739	63344221	4391516
北 京	87596	128644	104340626	1882593
福 建	89947	93898	72059496	3087618
甘 肃	66661	53127	27719369	1710826
广 东	246050	289388	293784406	7993062
广 西	95752	105773	64449855	3258438
贵 州	78368	69320	29105344	2433370
海 南	21367	26329	12692336	611621
河 北	187504	183683	82489933	5675067
河 南	239793	231149	114076405	7043628
黑龙江	129449	127358	47962073	2992970
湖 北	152062	147628	84006816	4805124
湖 南	168428	152904	63238363	5393968
吉 林	94636	86278	38087139	2259264
江 苏	221674	214938	166944454	6433837
江 西	87184	93287	46383376	3000964
辽 宁	171032	156893	70270696	4032159
内蒙古	72871	74177	31379522	1747905
宁 夏	22037	21830	12373335	602227
青 海	18586	16689	8918596	469811
山 东	280385	281654	134719233	8354234
山 西	110741	116660	37390228	2332714
陕 西	114339	123537	52692308	3236715
上 海	87548	95198	113669022	2282773
四 川	211524	194752	110475915	6489314
天 津	40787	53543	52164779	1037054
西 藏	6314	5843	3998564	120766
新 疆	97436	84202	37383273	3115413
云 南	126318	90330	62327579	3736495
浙 江	162905	187137	181663463	4899310
重 庆	74827	66653	38726559	2116631



### 2.11.1 模型设置

(1) 窗口设置方式。

用户可根据需要的不同结果来选择是用包络模型还是用乘数模型。如果需要效率值、参考标杆、松弛变量值和目标值等结果，应选择包络模型；如果需要效率值、投入和产出的权重系数等结果，则应选择乘数模型。

打开菜单“Step 2: Run Model” → “Run Envelopment Model” 或者 “Step 2: Run Model” → “Run Multiplier Model”，会显示模型设置的窗口。基本设置包括 Distance（距离函数类型），Orientation（模型导向）和 RTS（规模收益类型）三个方面。Distance 选择 Radial；CCR 1978；BCC1984。

Orientation 选择 Input - oriented 或者 Output - oriented。RTS 选择 Constant（CRS）或者 Variable（VRS）（见图 2-12 至图 2-14）。

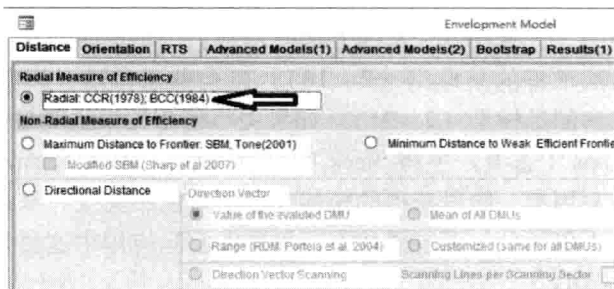


图 2-12 模型设置 1

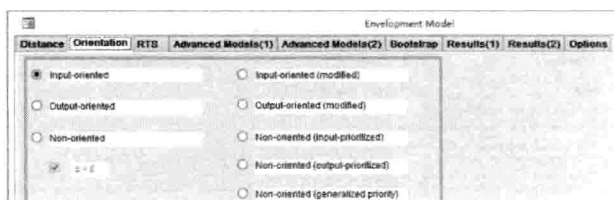


图 2-13 模型设置 2

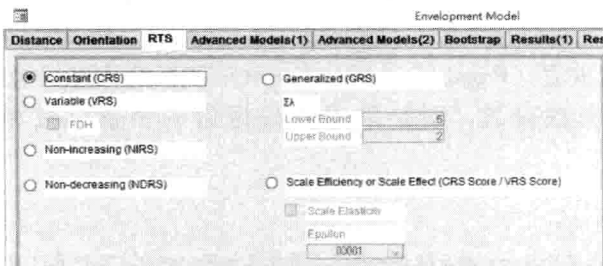


图 2-14 模型设置 3

鉴于 FDH 与 VRS 模型的关系，在 MaxDEA 软件中，FDH 模型在 RTS 界面的 VRS 选项之下（见图 2-15）。

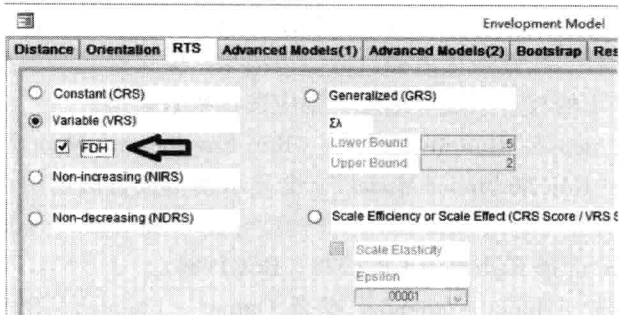


图 2-15 FDH 模型设置

在包络模型中，计算松弛变量的方法有两种：一是单阶段法，以投入导向模型为例，单阶段法求解的是模型（2-18）；二是两阶段法，以投入导向模型为例，两阶段法求解的是模型（2-21）。如果关心模型的松弛变量值或强有效目标值，建议在 Options（选项）中将 Slack 的计算方法（Slack Computation）设置为两阶段法，因为利用第一阶段获得的松弛变量值可能不完全，从而计算得出的目标值有可能实际上仍然处于弱有效状态，虽然在实际应用中这种情况发生的概率很低<sup>①</sup>（见图 2-16）。

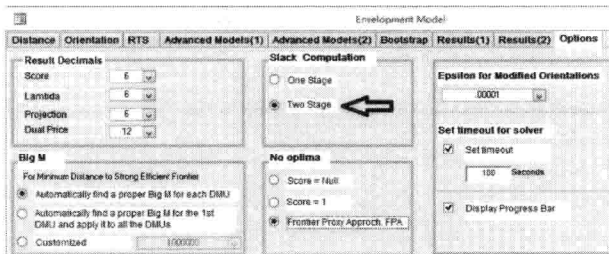


图 2-16 投入导向模型选项设置

在 Options 中还可以分别设置各项结果保留的小数位数，包括 Score（效率值）、Lambda（标杆权重系数）、Projection（目标值）、Dual Price（对偶值）。在结果中，比例改进值（Proportionate Movement）和松弛改进值（Slack Movement）的小数位数不单独设置，而是采用与目标值的小数位数相同的设置（见图 2-17）。

<sup>①</sup> 本例数据采用单阶段法和两阶段法的松弛变量结果相同。但在实际计算过程中，由于  $\theta^*$  和  $\varphi^*$  的计算精度问题（误差范围小于  $1E-10$ ），会导致采用单阶段法和两阶段法获得的松弛变量结果会有微小误差，当投入产出数据的原始数值很大时，例如本例数据的产出指标之一“诊疗人次”数量级达到  $1E+9$ ，松弛变量值的绝对误差可能达到 0.001 的级别。

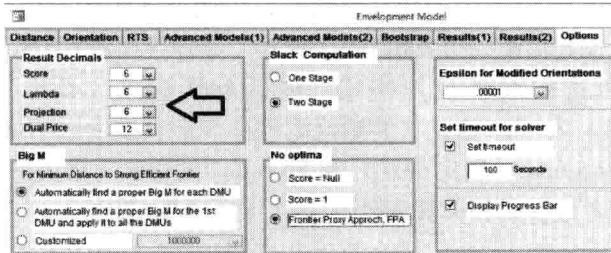


图 2-17 其他选项设置

在乘数模型的 Options 中，可以对 Score（效率值）、Weight（投入产出权重）、Weighted Value（虚拟投入产出值）的小数位数进行设置（见图 2-18）。其中 Weight 的小数位数与包络模型中的 Dual Price 的小数位数为同一设置，即在包络模型中改变 Dual Price 的小数位数时，乘数模型中 Weight 的小数位数随之改变。反之亦然。

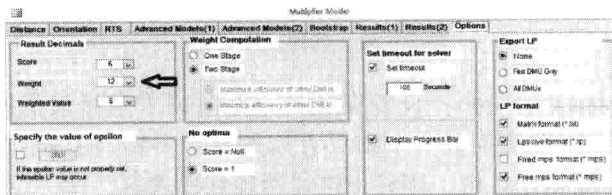


图 2-18 乘数模型选项设置

其他与基础模型相关的设置：

1) Display ProgressBar: 此选项决定是否在模型运行过程中显示进度条。在运行 DEA 模型时，CPU 占用率很高（会 100% 占用双核 CPU 的其中一核）。在运行较大数据 DEA 模型时，MaxDEA 软件可能会暂时失去响应，从而使进度条停止不动。在这种情况下，用户需要耐心等待。另外，由于当前 Windows 版本中还没有提供 64 位 ProgressBar 控件，所以在 64 位 MaxDEA 中不显示进度条（见图 2-19）。

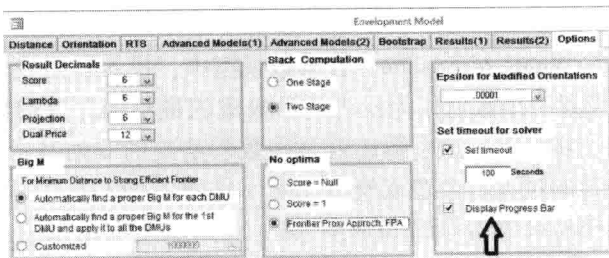


图 2-19 其他选项设置 1

2) Export LP: 设置是否导出线性规划式。此选项包括三个选项, 一是不导出规划式, 二是仅导出第一个 DMU 的规划式, 三是导出所有 DMU 的规划式。LP Format 列出了可选的线性规划格式, 包括矩阵格式 (必选)、Lpsolve 格式 (Lpsolve 软件格式) 和 mps 格式 (多数规划软件能够直接读取的格式)。mps 格式又分为 Fixed mps format (固定格式) 和 Free mps format (自由格式)。对线性规划式感兴趣的读者请参阅相关规划软件教材 (见图 2-20)。

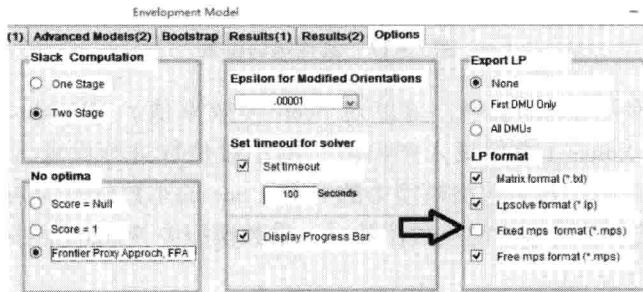


图 2-20 其他选项设置 2

3) Set Timeout for Solver: 设置在超过一定时间未求得最优解的情况下, 是否终止求解。例如, 设置时间为 100s, 在求解某个 DMU 的线性规划时, 如果时间超过 100s 还未获得最优解, 则终止该线性规划的求解。这一设置, 使 MaxDEA 在求解大型或复杂 DEA 模型时, 可以跳过长时间无法求得最优解的某个 DMU, 避免因个别 DMU 无法求解而使软件无法继续求解后续的 DMU (见图 2-21)。

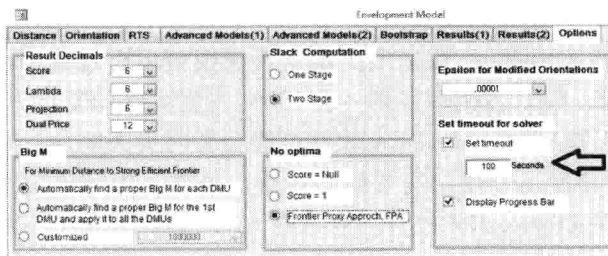


图 2-21 其他选项设置 3

4) Specify the Value of Epsilon: 在乘数模型中, 投入产出权重的最小值默认为 0。用户可以设置一个数值作为投入产出权重的最小值, 以避免出现投入产出权重为 0 的情况。实际上, 这个数值就是乘数模型中的非阿基米德无穷小 ( $\epsilon$ )。如果这个数值设置的过大, 会造成模型无解 (见图 2-22)。

用户可以在模型设置窗口的 Results (1) 中, 决定在结果窗口中选择性显示部分结果指标。

包络模型的结果包括以下几项 (见图 2-23)。

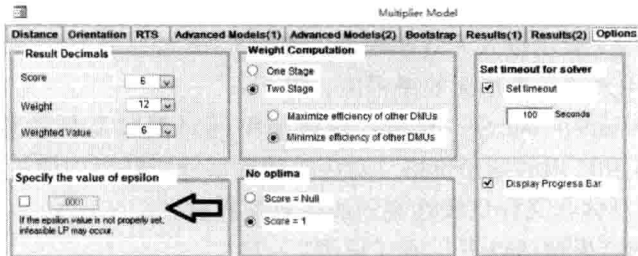


图 2-22 其他选项设置 4

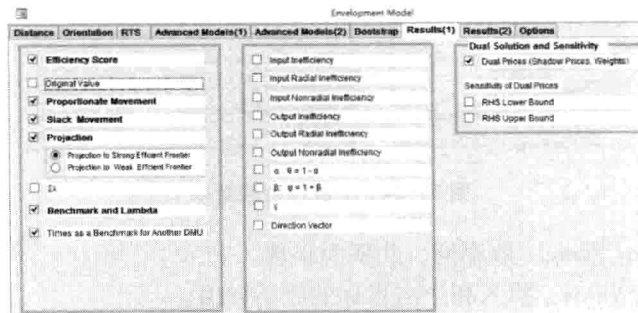


图 2-23 包络模型的结果

- 1) Efficiency Score: 效率值, 此项为必选。
- 2) Original Value: 投入和产出指标的原始数值。
- 3) Proportionate Movement: 比例改进值。
- 4) Slack Movement: 松弛改进值。
- 5) Projection: 目标值 (投影值)。其中 Projection to Strong Efficient Frontier 是指在强有效前沿上的投影值, Projection to Weak Efficient Frontier 是指在弱有效前沿上的投影值。
- 6)  $\sum \lambda$ : 参考标杆的权重系数 Lambda 之和。
- 7) Benchmark and Lambda: 参考标杆及其权重系数。
- 8) Times as a Benchmark for Another DMU: 有效 DMU 作为其他 DMU 的参考标杆的次数。
- 9) Input Inefficiency: 投入的无效率程度。在投入导向径向基础模型中, 投入的无效率程度  $= 1 - \theta^*$ 。
- 10) Input Radial Inefficiency: 在径向基础模型中, Input Inefficiency 与 Input Radial Inefficiency 相同。
- 11) Output Inefficiency: 产出的无效率程度。在产出导向基础模型中, 产出的无效率程度  $= \varphi^* - 1$ 。
- 12) Output Radial Inefficiency: 在径向基础模型中, Output Inefficiency 与

Output Radial Inefficiency 相同。

13)  $\alpha^*$ : 用来表示投入无效率程度, 等于  $1 - \theta^*$ 。

14)  $\beta^*$ : 用来表示产出无效率程度, 等于  $\varphi^* - 1$ 。

15) Dual Solution and Sensitivity: 包络模型的对偶解及其敏感性分析结果。对偶解是指投入和产出的影子价格, 对应乘数模型分析结果中的投入和产出的权重<sup>①</sup>。对偶解的具体含义详见线性规划或运筹学教材。

乘数模型的结果包括以下几项 (见图 2-24)。

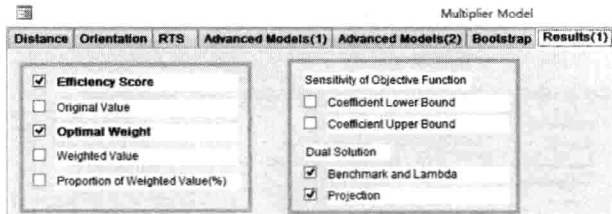


图 2-24 乘数模型的结果

- 1) Efficiency Score: 效率值, 此项为必选。
- 2) Original Value: 投入和产出指标的原始数值。
- 3) Weight: 投入和产出的权重系数。
- 4) Weighted Value: 虚拟投入产出值, 即原始值  $\times$  权重系数。
- 5) Proportion of Weighted Value (%): 某项投入 (或产出) 的虚拟值占所有投入 (或产出) 虚拟值的百分比。
- 6) Sensitivity of Objective Function: 目标函数值的敏感性分析结果。
- 7) Dual Solution: 对偶解, 包括 Benchmark and Lambda 和 Projection 两项。

(2) 快捷方式。

针对 4 种基础 DEA 模型, MaxDEA 提供了快捷菜单。通过菜单 “Step 2: Run Model”  $\rightarrow$  “Express to Basic Models”, 可以直接运行 4 种基础 DEA 模型。注意通过快捷方式直接运行的是包络模型。在快捷方式中, 松弛变量的计算方式取决于在窗口设置方式 Options 中的设置。

### 2.11.2 分析结果

(1) 效率值与松弛变量。

表 2-7 是投入导向 CRS 模型和产出导向 CRS 模型的效率值与松弛变量。在分析结果中, 第一列是序号, 第二列是 DMU 的名称, 第三列是 Score, 即效率值, 在投入导向模型中  $\text{Score} = \theta^*$ , 在产出导向模型中  $\text{Score} = 1/\varphi^*$ 。松弛变量的结果表示形式为 Slack Movement (指标名称), 例如床位数的松弛变量结果表示

<sup>①</sup> 在包络模型的对偶解中, 投入的影子价格表示为负数, 产出的影子价格表示为正数; 在乘数模型中, 投入和产出的权重系数均表示为正数。由于可能存在多个最优解, 包络模型的投入和产出的影子价格与乘数模型的投入和产出的权重有可能不一致。

为 Slack Movement (床位数)。对于无效 DMU 来说,其改进方向是减少投入,或增加产出。因此,在 MaxDEA 的分析结果中,投入的松弛改进值用负数表示,产出的松弛改进值用正数表示。

表 2-7 投入导向 CRS 模型和产出导向 CRS 模型的效率值与松弛变量<sup>①</sup>

DMU	投入导向 CRS					产出导向 CRS				
	效率值	床位数 (个)	卫技 人员数 (人)	诊疗 人次 (人次)	入院 人数 (人)	效率值	床位数 (个)	卫技 人员数 (人)	诊疗 人次 (人次)	入院 人数 (人)
安徽	0.944	0	0	11623213	0	0.944	0	0	12309544	0
北京	0.917	0	-30637	0	212841	0.917	0	-33394	0	231997
福建	1.000	0	0	0	0	1.000	0	0	0	0

效率值与松弛变量的规律性及本例结果的特点如下。

1) 前文已指出,投入导向 CRS 模型和产出导向 CRS 模型的效率值相同,表 2-7 的结果用实例验证了这一点。

2) 效率值等于 1 为(弱)有效,如果同时所有松弛变量均为 0,则为强有效。本例分析结果中,有 6 个 DMU 的效率值为 1,并且这 6 个 DMU 的所有投入和产出的松弛变量均为 0,说明 6 个 DMU 均为强有效。

3) 在投入导向的径向模型中,至少有一项投入的松弛变量为 0;在产出导向的径向模型中,至少有一项产出的松弛变量为 0。以投入导向的模型为例,假设某 DMU 的结果中,所有投入的松弛变量都不为 0,说明仍然存在等比例改进的空间,所得到的解并非最优解,因此不存在所有投入的松弛变量都不为 0 的情况。在本例分析结果中,投入导向模型中,不存在床位数和卫技人员数的松弛变量均不为 0 情况;产出导向模型中也不存在诊疗人次和入院人数的松弛变量均不为 0 情况。

## (2) 参考标杆与目标值(投影值)<sup>②</sup>

表 2-8 列出了部分 DMU 的参考标杆和目标值。在分析结果中,参考标杆用 Benchmark ( $\lambda$ ) 表示, $\lambda$  是被参考的 DMU 的系数,有多个参考 DMU 时,用分号进行分隔。例如,安徽的参考标杆为“福建(0.6362);新疆(0.7791)”,这表示安徽在前沿上的投影点由福建和新疆的投入产出线性组合构成,福建和新疆的权重系数分别为 0.6362 和 0.7791。

<sup>①</sup> 为了减少表格的宽度,松弛变量的结果没有保留小数部分。在下一表格中作了相同处理。为减少篇幅,本书示例仅列出部分结果。

<sup>②</sup> 在方便表述,在本书中,将最优解中  $\lambda^* > 0$  的 DMU 称为被评价 DMU 的参考标杆。参考标杆的线性组合构成被评价 DMU 的投影值(目标值)。在参考集中没有作为参考标杆的 DMU,其  $\lambda^* = 0$ 。

表 2-8 投入导向 CRS 模型和产出导向 CRS 模型的参考标杆与目标值 (强有效投影值)

DMU	投入导向 CRS					产出导向 CRS				
	参考标杆	床位数 (个)	卫技 人员数 (人)	诊疗 人次数 (人次)	入院 人数 (人)	参考标杆	床位数 (个)	卫技 人员数 (人)	诊疗 人次数 (人次)	入院 人数 (人)
安徽	福建(0.6362); 新疆(0.7791)	133136	125338	74967434	4391516	福建(0.6737); 新疆(0.8251)	140997	132739	79394136	4650828
北京	上海(0.9179)	80363	87385	104340626	2095434	上海(1.0005)	87596	95250	113731343	2284025
福建	福建(1.0000)	89947	93898	72059496	3087618	福建(1.0000)	89947	93898	72059496	3087618

无效 DMU 在前沿上的投影值代表其改进的目标值。假设其投入和产出指标到达了目标值, 如果在当前的数据集中再次对其进行评价 (其他 DMU 的投入和产出保持不变), 则评价结果将变为弱有效或强有效。是弱有效还是强有效, 取决于目标值的计算是选择 Projection to Strong Efficient Frontier (在强有效前沿的投影值), 还是 Projection to Weak Efficient Frontier (在弱有效前沿的投影值)<sup>①</sup>, 如图 2-25 所示。

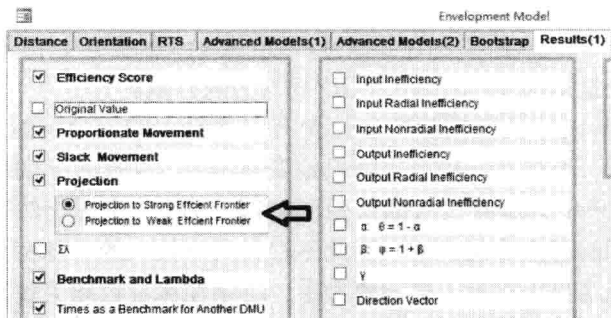


图 2-25 有效性设置

在 MaxDEA 的分析结果中, 投入的改进值用负数表示, 产出的改进值用正数表示。因此, 被评价 DMU 的投入和产出投影值的计算方法可统一表示为

$$\text{目标值} = \text{原始值} + \text{改进值}$$

如果目标值选择 Projection to Strong Efficient Frontier, 则改进值包括两部分,

<sup>①</sup> 在本书中, 将径向 DEA 模型得出的弱有效前沿定义为包含了与坐标轴平行部分 (弱有效部分) 的完整前沿曲线 (图 2-7 中的弱有效前沿曲线为 *MABD*, 包含呈现弱有效的 *MA* 段), 而强有效前沿不包括与坐标轴平行的部分 (图 2-7 中的强有效前沿曲线为 *ABD*, 不包含呈现弱有效的 *MA* 段)。弱有效前沿是由强有效部分和弱有效部分共同组成的, 而强有效前沿仅包含强有效部分。因此如果用户选择目标值的计算方法为 Projection to Weak Efficient Frontier, 获得的目标值有可能是强有效投影点, 也可能是弱有效投影点。当所有松弛变量的结果均为 0 时, Projection to Weak Efficient Frontier 获得的目标值为强有效投影点, 只要有一个松弛变量的结果不为 0, Projection to Weak Efficient Frontier 获得的目标值即为弱有效投影点。



一是比例改进值 (Proportionate Movement)<sup>①</sup>, 二是松弛改进值 (Slack Movement), 即

强有效目标值 = 原始值 + 比例改进值 + 松弛改进值

如果目标值选择 Projection to Weak Efficient Frontier (在弱有效前沿的投影值), 则改进值仅包括比例改进值 (Proportionate Movement)。即

弱有效目标值 = 原始值 + 比例改进值, 或  $\hat{x}_k = \theta^* x_k$ ,  $\hat{y}_k = \varphi^* y_k$

在投入导向径向模型中, 投入的比例改进值 = -原始值  $\times (1 - \theta^*)$ , 产出的比例改进值为 0; 在产出导向径向模型中, 投入的比例改进值为 0, 产出的比例改进值 = 原始值  $\times (\varphi^* - 1)$ 。

表 2-9 以安徽为例, 演示了通过改进值的方法计算强有效目标值。

表 2-9 投入和产出强有效目标值计算方法示例: 改进值法 (安徽)

项目	投入导向 CRS				产出导向 CRS			
	床位数 (个)	卫技 人员数 (人)	诊疗 人次 (人次)	入院 人数 (人)	床位数 (个)	卫技 人员数 (人)	诊疗 人次 (人次)	入院 人数 (人)
原始值	140997	132739	63344221	4391516	140997	132739	63344221	4391516
径向改进	-7861	-7401	0	0	0	0	3740371	259312
松弛改进	0	0	11623213	0	0	0	12309544	0
目标值	133136	125338	74967434	4391516	140997	132739	79394136	4650828

此外, 被评价 DMU 的投入和产出的强有效目标值也可以通过参考标杆及其权重系数来计算<sup>②</sup>

$$\hat{x}_k = \sum_{j=1}^n \lambda_j^* x_j, \hat{y}_k = \sum_{j=1}^n \lambda_j^* y_j$$

表 2-10 同样以安徽为例, 演示了通过标杆值法计算强有效目标值。由于原始值最大为 8 位数字, 所以权重系数需要保留 9 位小数, 以避免计算误差。两种方法计算的目标值相同。

(3) 投入和产出的权重系数。

选择乘数模型 (“Step 2: Run Model” → “Run Multiplier Model”)。分析结果显示的结果窗口的 “Weights (Dual Values)” 表格中, 投入产出的权重用 Weight (指标名称) 表示。例如, Weight (床位数) 表示投入指标 “床位数” 的权重系数。

① 在径向模型中, 比例改进值一般称为径向改进值 (Radial Movement), 表示各项投入 (或产出) 等比例改进的数量。但在方向距离函数模型中的, 这一部分改进并非等比例改进, 而是按照方向向量的方向改进。为统一这部分改进值的名称, 在 MaxDEA 软件的分析结果中, 将其统称为比例改进值。

② 弱有效目标值不能通过标杆值计算。

表 2-10 投入和产出强有效目标值计算方法示例：标杆值法（安徽）

项目	投入导向 CRS				产出导向 CRS			
	床位数 (个)	卫技 人员数 (人)	诊疗 人次数 (人次)	入院 人数 (人)	床位数 (个)	卫技 人员数 (人)	诊疗 人次数 (人次)	入院 人数 (人)
福建原始值	89947	93898	72059496	3087618	89947	93898	72059496	3087618
福建权重	0.636154651				0.673718522			
新疆原始值	97436	84202	37383273	3115413	97436	84202	37383273	3115413
新疆权重	0.779130551				0.825136911			
目标值	133136	125338	74967434	4391516	140997	132739	79394136	4650828

在本例数据中，由于投入产出数据的单位分别采用个、人和人次，各项指标的数值均较大，最大值达到 9 位数。虽然理论上投入产出指标的数值单位对 DEA 分析结果没有影响，但是实际应用中可能会产生两个问题：

1) 由于投入产出数值过大，乘数模型分析结果中的投入产出权重系数会很小，当在 Options 中设置的小数位数不够多时，会出现结果精度不够甚至是错误地显示为 0 的情况。表 2-11 是投入导向 CRS 乘数模型的部分分析结果（小数位数设置为保留 12 位），由于小数位数较多，软件自动采用科学计数法显示结果。从结果中可以看出，投入和产出权重最大值为西藏卫技人员的权重，约为 0.000136。如果结果只保留 3 位小数，则所有 DMU 的投入产出权重将全部错误地显示为 0；如果结果只保留 4 位小数，则西藏的卫技人员的权重将显示为 0.0001，其他将全部错误地显示为 0。

表 2-11 投入导向 CRS 乘数模型的投入产出权重

DMU	床位数 (个)	卫技人员数 (人)	诊疗人次数 (人次)	入院人数 (人)
安徽	4.44238E-06	2.81483E-06	0	2.15015E-07
北京	1.1416E-05	0	8.793E-09	0
福建	1.11177E-05	0	1.12E-10	3.21257E-07

2) 如果投入产出数值过大或过小，会出现由于超出线性规划计算精度范围而求解失败的问题。这样的问题在包络模型中也会出现。例如，在本例数据的产出导向 CRS 乘数模型中，会出现 6 个省份计算失败（见表 2-12）。这种情况下，在分析结果的 DMU 一栏，会标注“LP numerical failure”，LP 是指 linear programming（线性规划）。如果将数值最大的指标诊疗人次数单位改为“万人次”，即可解决计算失败的问题。

表 2-12 产出导向 CRS 乘数模型的投入产出权重

DMU	床位数 (个)	卫技人员数 (人)	诊疗人次数 (人次)	入院人数 (人)
安徽	4.70469E-06	2.98104E-06	0	2.27712E-07
河北: LP numerical failure	0	0	0	0
河南: LP numerical failure	0	0	0	0
湖南: LP numerical failure	0	0	0	0
山东: LP numerical failure	0	0	0	0
山西: LP numerical failure	0	0	0	0
四川: LP numerical failure	0	0	0	0

综上所述,虽然理论上投入产出指标的数值单位对 DEA 分析结果没有影响,但是用户仍然需要合理设置数值单位。例如,在本例数据中,如果床位数和卫技人员数采用“万”作为数值单位,诊疗人次数采用“亿”作为数值单位,入院人数采用“百万”作为数值单位,则结果如表 2-13 所示。

表 2-13 投入导向 CRS 乘数模型的投入产出权重 (数值单位调整后)

DMU	床位数 (个)	卫技人员数 (人)	诊疗人次数 (人次)	入院人数 (人)
安徽	0.044424	0.028148	0	0.215015
河北	0.032906	0.020851	0	0.159271
河南	0.02589	0.016404	0	0.125308
湖南	0.037691	0.023882	0	0.18243
山东	0.021794	0.013809	0	0.105483
山西	0.080325	0.009469	0	0.262797
四川	0.027167	0.02184	0.013806	0.14234

限于篇幅,本节不再罗列 VRS 模型的结果。需要注意的是,在 VRS 乘数模型中,与 CRS 相比,在结果中会有额外一列 ( $\nu^*$  或  $\mu^*$ ),表示自由变量  $\nu_0$  或  $\mu_0$  的结果。

#### (4) 包络模型与乘数模型对偶解的关系。

无论是包络模型还是乘数模型,在结果窗口中均显示两个表格,即“Score, Benchmarks”和“Weights (Dual Values)”。

包络模型的求解结果显示在“Score, Benchmarks”表格中,乘数模型的求解

结果显示在“Weights (Dual Values)”表格中。

包络模型的对偶解显示在“Weights (Dual Values)”表格中，乘数模型的对偶解显示在“Score, Benchmarks”表格中。

包络模型的解对应乘数模型的对偶解；乘数模型的解对应包络模型的对偶解。在包络模型的对偶解中，投入产出的对偶价格相当于乘数模型中的投入产出权重系数。需要注意的是，在包络模型的对偶解中对偶价格保留了正负号，投入的对偶价格为负数，产出的对偶价格为正数。另外，由于乘数模型经常存在多个最优解，所以两者在数值上有可能不相同。

在乘数模型的对偶解中，提供了参考标杆和目标值。这两项结果与包络模型的结果一致。

#### (5) 规模效率。

在窗口设置方式的 RTS 选项中，如果选择“Scale Efficiency (CRS and VRS)”，软件会先后运行 CRS 模型和 VRS 模型，并提供两个模型的效率值及根据两个模型的效率值计算的规模效率值 (Scale Efficiency Score) 或规模效应值 (Scale Effect Score)，如图 2-26 所示。包络模型和乘数模型得出的规模效率是相同的。

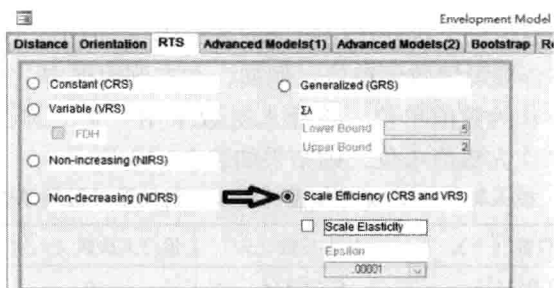


图 2-26 RTS 选项设置

在 MaxDEA 的结果窗口中，显示的效率值分别是以下 3 种。

1) Technical Efficiency Score (CRS): 表示 CRS 模型获得的技术效率值。为与 VRS 模型得出的技术效率值相区别，通常将 CRS 模型得出的技术效率称为综合技术效率。

2) Pure Technical Efficiency Score (VRS): 表示 VRS 模型获得的技术效率值，通常称为纯技术效率。

3) Scale Efficiency Score/ Scale Effect Score: 规模效率值或规模效应值<sup>①</sup>。

表 2-14 列出了部分省份的综合技术效率、纯技术效率和规模效率。三者之间的关系为：

<sup>①</sup> 只有采用径向距离时，得出的才是规模效率值，其他距离函数（如 SBM）得出的只能称为规模效应值。

规模效率值 = 综合技术效率/纯技术效率

通过菜单“Tools”→“Browse Results”，可以查看 CRS 和 VRS 模型的详细分析结果，共有以下 7 个表格。

1) Tbl\_ Results\_ Summary: 模型总结。

2) Tbl\_ Results of Envelopment Model: 综合技术效率值、纯技术效率值和规模效率值。

3) Tbl\_ Results of Envelopment Model\_ CRS: CRS 包络模型的分析结果或 CRS 乘数模型的对偶解。

4) Tbl\_ Results of Envelopment Model\_ VRS: VRS 包络模型的分析结果或 VRS 乘数模型的对偶解。

5) Tbl\_ Results\_ Weights: : 综合技术效率值、纯技术效率值和规模效率值。

6) Tbl\_ Results\_ Weights\_ CRS: CRS 乘数模型的分析结果或 CRS 包络模型的对偶解。

7) Tbl\_ Results\_ Weights\_ VRS: VRS 乘数模型的分析结果或 VRS 包络模型的对偶解。

通过菜单“Tools”→“Export Results to Excel”，可以把上述 7 个表格导出到 Excel 中。

表 2-14 规模效率

DMU	投入导向模型			产出导向模型		
	综合技术效率	纯技术效率	规模效率	综合技术效率	纯技术效率	规模效率
安徽	0.9442	0.9549	0.9889	0.9442	0.9568	0.9869
北京	0.9174	0.9185	0.9989	0.9174	0.9175	0.9999
福建	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
甘肃	0.8324	0.8538	0.9750	0.8324	0.8473	0.9825
广东	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
广西	0.9901	0.9961	0.9940	0.9901	0.9964	0.9937
贵州	0.9631	0.9708	0.9920	0.9631	0.9698	0.9931
海南	0.8331	0.9415	0.8849	0.8331	0.9323	0.8936
河北	0.9039	0.9391	0.9625	0.9039	0.9452	0.9563
河南	0.8826	0.9615	0.9180	0.8826	0.9698	0.9101
黑龙江	0.6893	0.6900	0.9990	0.6893	0.7020	0.9820
湖北	0.9469	0.9704	0.9759	0.9469	0.9724	0.9738

## 第3章 DEA模型的规模收益与规模弹性

### 3.1 DEA模型的规模收益类型

在 DEA 模型中，对规模收益（Returns to Scale, RTS）的设定决定了前沿的形状。在前一章中介绍的 CRS 和 VRS 模型，在单投入单产出的模型中，其前沿分别是射线和凸性曲线。如图 3-1 所示，在 CRS 模型中，前沿为射线  $OB$ ，有效 DMU 只有  $B$  点一个；而在 VRS 模型中，前沿为  $MABD$  凸曲线，有效 DMU 包括  $A$ 、 $B$  和  $D$  三个，如图 3-2 所示。

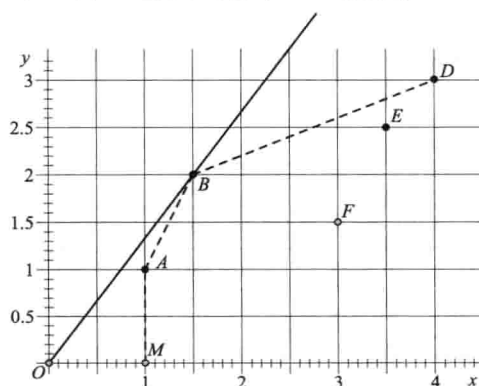


图 3-1 CRS 模型的前沿

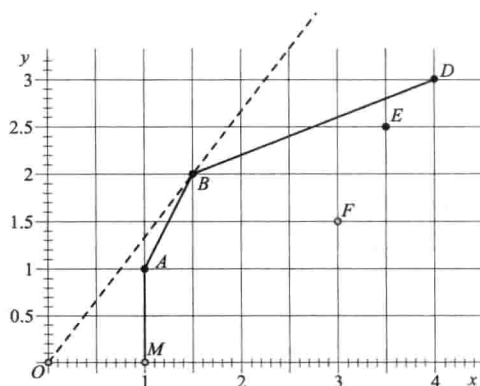


图 3-2 VRS 模型的前沿

那么在建立 DEA 模型时，应如何选择 RTS 类型呢？如果已知所评价的生产技术是 CRS 类型的，或者虽然所评价的生产技术是 VRS 类型的，但已知研究样本的生产规模处于 CRS 阶段，那么就应选择 CRS 模型。而在实际生产过程中，上述情况往往并不存在，生产技术的规模收益并非 CRS，或者也不能确定研究样本的生产规模是否处于 CRS 阶段。这种情况下，如果采用 CRS 模型，得出的技术效率并非完全是纯技术效率，而是包含了规模效率成分的综合效率。

一般来说，生产技术的规模收益要先后经历规模收益递增（Increasing Returns to Scale, IRS）、规模收益不变（CRS）和规模收益递减（Decreasing Returns to Scale, DRS）三个阶段。如果无法确定研究样本处于哪个阶段，或者已知研究样本处于规模收益的各个阶段，则评价技术效率时，应选择 VRS 模型。VRS 模型得出的技术效率是纯技术效率。

如果已知研究样本处于 IRS 或 CRS 阶段（肯定不会处于 DRS 阶段，

Non - Decreasing Returns to Scale, NDRS), 或者已知研究样本处于 CRS 或 DRS 阶段 (肯定不会处于 IRS 阶段, Non - Increasing Returns to Scale, NIRS)<sup>①</sup>, 前沿分别是什么形状呢?

VRS 模型的前沿  $MABD$  可分为三个部分:  $MAB$  (不包括  $B$  点) 是 IRS 阶段,  $B$  点为 CRS 阶段,  $BD$  (不包括  $B$  点) 为 DRS 阶段。NDRS 模型的前沿不会出现 DRS 阶段, 所以 NDRS 的前沿由两部分构成:  $MAB$  (不包括  $B$  点) 为 IRS 阶段, 以  $B$  点为端点的射线  $r$  为 CRS 阶段 (见图 3-3)。NIRS 模型的前沿不存在 IRS 阶段, 其前沿由两部分构成:  $OB$  为 CRS 阶段,  $BD$  (不包括  $B$  点) 为 DRS 阶段 (见图 3-4)。

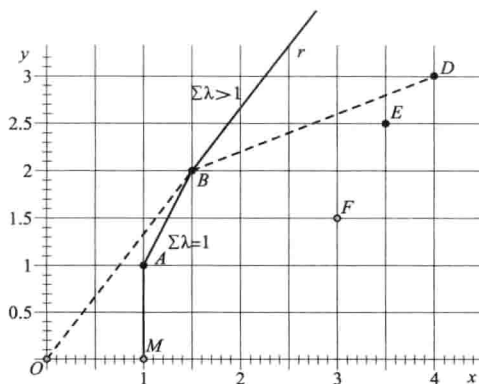


图 3-3 NDRS 模型的前沿 (投入导向)

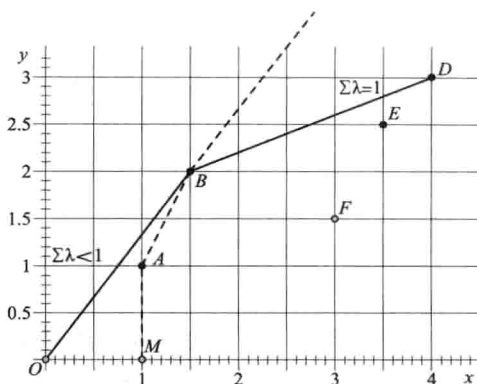


图 3-4 NIRS 模型的前沿 (投入导向)

VRS 模型是在 CRS 模型的基础上增加了约束  $\Sigma\lambda = 1$ 。在 VRS 前沿曲线  $ABD$  上的任意一点<sup>②</sup>, 均可在系数之和为 1 的约束下由有效 DMU ( $A$ 、 $B$ 、 $D$ ) 的线性组合构成。

在图 3-3 中, 曲线  $MAB$  及射线  $r$  构成了 NDRS 模型的前沿。其中, 在  $AB$  段 (IRS 阶段), 线性组合系数之和等于 1; 在射线  $r$  段 (CRS 阶段), 线性组合系数之和大于或等于 1 (仅  $B$  点为等于 1)。所以 NDRS 模型的线性组合系数约束为大于或等于 1, 即  $\Sigma\lambda \geq 1$ <sup>③</sup>。

在图 3-4 中, 曲线  $OBD$  构成了 IDRS 模型的前沿。其中, 在  $OB$  段 (CRS 阶段), 线性组合系数之和小于或等于 1 (仅  $B$  点为等于 1); 在  $BD$  段 (DRS 阶段), 线性组合系数之和 = 1。所以 NIRS 模型的线性组合系数约束为小于或等于 1, 即  $\Sigma\lambda \leq 1$ 。

根据线性规划的对偶理论, 可以得出各种 RTS 类型的乘数模型 (见表 3-1)。

① 在有的文献中将 NDRS 模型称为 IRS 模型, 将 NIRS 模型称为 DRS 模型, 这是一种不准确的名词。因为在 NDRS 模型中, 包含了 IRS 和 CRS 两个阶段, 在 NIRS 模型中, 包含了 CRS 和 DRS 两个阶段。

② 平行于坐标轴的  $MA$  段为弱有效前沿, 其实际的强有效投影点为  $A$  点, 线性组合系数之和也等于 1。

③ 射线  $OB$  上的任意一点均可用  $B$  点乘以一个系数来构建, 记做  $S = kB$ 。在  $B$  点以下系数  $k$  小于 1; 在  $B$  点以上, 系数  $k$  大于 1。

表 3-1 不同 RTS 类型的 DEA 模型

项目	包络模型		乘数模型	
	投入导向	产出导向	投入导向	产出导向
CRS	$\min \theta$ $\text{s. t. } \theta x_0 - X\lambda \geq 0$ $Y\lambda \geq y_0$ $\lambda, s^-, s^+ \geq 0$	$\max \varphi$ $\text{s. t. } X\lambda \leq x_0$ $-Y\lambda + \varphi y_0 \leq 0$ $\lambda, s^-, s^+ \geq 0$	$\max \mu' y_0 - \mu_0$ $\text{s. t. } \nu' x_0 = 1$ $-\nu' X + (\mu' Y - \mu_0) \leq 0$ $\mu, \nu \geq 0 \text{ or } \mu, \nu \geq \varepsilon$ $\mu_0 = 0$	$\min \nu' x_0 + \nu_0$ $\text{s. t. } \mu' y_0 = 1$ $(\nu' X + \nu_0) - \mu' Y \geq 0$ $\mu, \nu \geq 0 \text{ or } \mu, \nu \geq \varepsilon$ $\nu_0 = 0$
VRS	$e\lambda = 1$	$e\lambda = 1$	$\mu_0 \text{ free}$	$\nu_0 \text{ free}$
NDRS	$e\lambda \geq 1$	$e\lambda \geq 1$	$\mu_0 \leq 0$	$\nu_0 \leq 0$
NIRS	$e\lambda \leq 1$	$e\lambda \leq 1$	$\mu_0 \geq 0$	$\nu_0 \geq 0$
GRS	$L_{\sum \lambda} \leq e\lambda \leq U_{\sum \lambda}$	$L_{\sum \lambda} \leq e\lambda \leq U_{\sum \lambda}$	$L_{\mu_0} \leq \mu_0 \leq U_{\mu_0}$	$L_{\nu_0} \leq \nu_0 \leq U_{\nu_0}$

注： $e$  表示一个所有元素值均为 1 的行向量，即  $e = (1, 1, \dots, 1)$ 。在不同文献的公式中，乘数模型的自由变量（ $\mu_0$  和  $\nu_0$ ）有的用正号有的用负号，但在约束中的符号也会相应地改变，所以结果相同。

如果在研究样本中，已明确哪些 DMU 处于 IRS 阶段，哪些处于 CRS 阶段，哪些处于 DRS 阶段，则可以分组分别建立 NDRS 模型、CRS 模型和 NIRS 模型。如果只是已知生产技术为 VRS，而对研究样本中各 DMU 所处的 RTS 状态并不清楚，则选择 VRS 模型来计算纯技术效率。

本节参考文献：Cooper William W, et al., 2007; Färe Rolf, et al., 1983; Grosskopf, 1986; Zhu, 2009。

## 3.2 DMU 规模收益状态的判断

### 3.2.1 通过包络模型判断规模收益状态

前一节讲的是如何根据生产技术或研究样本的规模收益性质来选择 DEA 模型。本节讨论在已知所研究的生产技术及研究样本属于规模收益可变时，如何判断各个 DMU 所处的规模收益阶段，是处于 IRS、CRS，还是 DRS 阶段。

在前一节中讲到，可以采用对“线性组合系数之和”的不同约束来构建针对不同规模收益的生产技术的 DEA 模型。当生产技术为规模收益可变，并且研究样本所处的规模收益阶段未知时，应建立 VRS 模型。但是在 VRS 模型的结果中，“线性组合系数之和”均为 1，显然不能通过“线性组合系数之和”的结果来判断 DMU 处于哪个规模收益阶段。

前面讲到，在研究规模收益可变的生物技术并且研究样本的规模收益状态未知时，应该建立 VRS 模型。假设我们同时也建立 CRS 模型，并且把 CRS 和 VRS 模型的前沿放置于同一坐标系中，结果如图 3-5 所示。CRS 模型的前沿（射线  $OC$ ）和 VRS 模型的前沿（实线部分）放在一起。

我们观察一下，在 VRS 模型的前沿曲线上， $A$  点及  $F$  的投影点处于 IRS 阶



段,  $B$  和  $C$  两点及  $G$  点的投影点处于 CRS 阶段,  $D$  点及  $E$  点的投影点处于 DRS 阶段。  $A$  点和  $F$  点在 CRS 前沿曲线 (射线  $OC$ ) 上的投影点位于  $B$  点以下, 其在 CRS 模型中的“线性组合系数之和”小于 1;  $B$  点、 $C$  点和  $G$  点在 CRS 前沿曲线上的投影点位于  $BC$  段, 其在 CRS 模型中的“线性组合系数之和”等于 1;  $D$  点和  $E$  点在 CRS 前沿曲线上的投影点位于  $C$  点以上, 其在 CRS 模型中的“线性组合系数之和”大于 1。

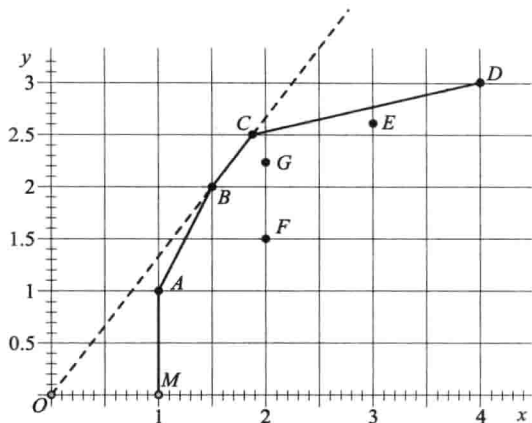


图 3-5 DMU 所处规模收益状态的判断

总结以上规律, 似乎可以很容易地借用 CRS 模型来判断 VRS 模型中各 DMU 所处的规模收益状态, 即如果在被评价 DMU 的结果中:

- (1)  $\sum \lambda^* < 1$ , 则说明该 DMU 处于 IRS 状态;
- (2)  $\sum \lambda^* = 1$ , 则说明该 DMU 处于 CRS 状态;
- (3)  $\sum \lambda^* > 1$ , 则说明该 DMU 处于 DRS 状态。

但是, 在 CRS 模型的前沿曲线 (射线  $OC$ ) 上, 存在两个观测点 ( $B$  点和  $C$  点), 射线  $OC$  上的任意一点既可由  $B$  点线性构造, 也可由  $C$  点线性构造, 或者由两点共同构造, 即

$$S = \lambda B \text{ 或 } S = \lambda C \text{ 或 } S = \lambda_1 B + \lambda_2 C$$

这意味着在 CRS 模型中必然存在着多个最优解。在图 3-5 中,  $G$  点在 CRS 模型前沿上的投影点位于  $BC$  之间, 如果该投影点由  $B$  点构造, 则  $\lambda > 1$ ; 如果该投影点由  $C$  点构造, 则  $\lambda < 1$ ; 如果由  $B$ 、 $C$  两点共同构造, 则  $\lambda < 1$ 、 $\lambda = 1$ 、 $\lambda > 1$  都可能会出现。而实际上,  $G$  点处于 CRS 状态, 这说明上述判断 DMU 所处规模收益状态的方法并不完全正确。为了避免类似  $G$  点这样的错误判断, 需要将多解问题考虑在内, 判断方法修正为以下几种。

#### RTS 判断方法 1:

- (1) 如果在 CRS 模型的所有最优解中,  $\sum \lambda^* < 1$ , 则说明该 DMU 处于 IRS 状态;
- (2) 如果在 CRS 模型的所有最优解中,  $\sum \lambda^* > 1$ , 则说明该 DMU 处于 DRS 状态;
- (3) 在 CRS 模型的所有最优解中, 只要其中一个解  $\sum \lambda^* = 1$ , 则说明该 DMU 处于 CRS 状态。

求解 DEA 模型的所有最优解并非易事。确定以上条件并不要求解所有最优解。在实际计算中, 只需要在求解 CRS 模型之后, 再额外求解两个模型, 分

别获得的  $\Sigma\lambda$  最大值和最小值即可。

以投入导向的模型为例, 求解  $\Sigma\lambda$  最大值 (最小值) 的线性规划式为

$$\begin{aligned} & \max(\min) \sum_{j=1}^n \lambda_j \\ & \text{s. t. } \sum_{j=1}^n \lambda_j \theta_j^* x_{ij} \leq \theta_k^* x_{ik} \\ & \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{rk} \\ & \quad \lambda \geq 0 \\ & \quad i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3-1)$$

在上述规划式中, 如果  $\max(\Sigma\lambda) < 1$ , 则说明在所有最优解中  $\Sigma\lambda$  均小于 1; 如果  $\min(\Sigma\lambda) > 1$ , 则说明在所有最优解中  $\Sigma\lambda$  均大于 1。

### RTS 判断方法 2:

- (1) 如果  $\max(\Sigma\lambda) < 1$ , 则说明该 DMU 处于 IRS 状态;
- (2) 如果  $\min(\Sigma\lambda) > 1$ , 则说明该 DMU 处于 DRS 状态;
- (3) 不在以上两种情况之列, 说明该 DMU 处于 CRS 状态。

与设法获得所有最优解相比, 上述求解  $\Sigma\lambda$  最大值和最小值的方法显然更为方便。但是, 这种方法仍然需要额外求解两个线性规划式, 增加了规划求解计算量。

根据一个最优解中的  $\Sigma\lambda$  来判断规模收益状态, 有可能把实际处于 CRS 状态的 DMU 误判为 IRS 或 DRS。通过图 3-5 可以观察到, CRS 模型的前沿与 VRS 模型的前沿会存在重合的区域, 该区域就是 VRS 前沿曲线的 CRS 部分 (即 BC 段)。如果一个有效 DMU 处于 CRS 状态, 则该 DMU 必定位于前沿曲线的 CRS 区域内。结合上一章中介绍的计算规模效率的方法, 可以得出: 如果一个 DMU 处于 CRS 状态, 则该 DMU 的规模效率 = 1; 反之, 如果一个 DMU 的规模效率 = 1, 则该 DMU 处于 CRS 状态。

根据这一规律, 可以得出

### RTS 判断方法 3:

- (1) 如果规模效率 = 1, 则说明该 DMU 处于 CRS 状态;
- (2) 如果规模效率 < 1, 并且在任一最优解中  $\Sigma\lambda^* < 1$ , 则说明该 DMU 处于 IRS 状态;
- (3) 如果规模效率 < 1, 并且在任一最优解中  $\Sigma\lambda^* > 1$ , 则说明该 DMU 处于 DRS 状态。

对于无效 DMU, 如图 3-5 中的 E 点、F 点和 G 点, 直接求解其规模收益状态和先将这些 DMU 投影到 VRS (弱有效) 前沿上, 然后再求解其投影点的规模收益状态, 结果是相同的。但是, 如果投影到 VRS 强有效前沿上, 然后利用投影点求解获得的规模收益状态可能是不同的。如果直接求解规模收益状态得到的结果是 IRS 或 DRS, 在利用强有效投影点求解时, 结果则有可能是 CRS。例如,

在图3-6中,  $H$  在 CRS 前沿上的投影点为  $H_C$ 。如果先将  $H$  投影到 VRS 弱有效前沿上, 获得投影点  $H_V$ , 然后  $H_V$  在 CRS 前沿上的投影点仍然为  $H_C$ , 说明直接求解  $H$  的规模收益状态和先将其投影到 VRS 弱有效前沿上, 然后再利用弱有效投影点求解规模收益状态的结果是一致的。但是, 如果先将  $H$  投影到 VRS 强有效前沿上, 获得的投影点为  $B$ , 再求解强有效投影点  $B$  的规模收益状态, 则结果为 CRS。

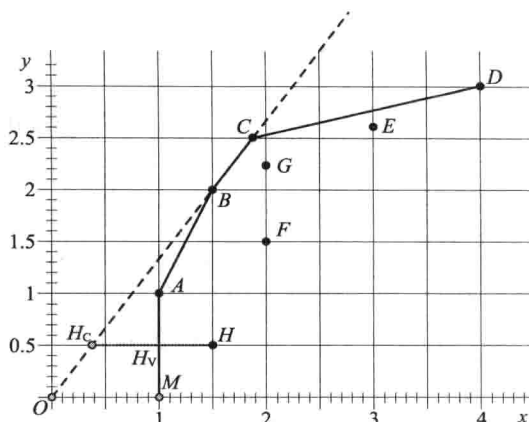


图3-6 直接求解与采用强有效投影点求解规模收益状态比较

对于无效 DMU, MaxDEA 软件采用的是直接求解的方法。在后面的“MaxDEA 软件求解规模收益与规模弹性实例”中, 会介绍如何采用无效 DMU 的弱有效或强有效投影值来求解规模收益的方法。

### 3.2.2 通过乘数模型判断规模收益状态

根据线性规划的对偶理论, 规模收益状态也可以通过乘数模型来判断。

**推理 1:**

以投入导向模型为例, 假设  $DMU_k$  在弱有效前沿上的投影值为  $(\theta_k^* x_{ik}, y_{rk})$ , 则  $\sum_{r=1}^q \mu_r y_{rk} - \sum_{i=1}^m \nu_i \theta_k^* x_{ik} - \mu_{0k} = 0$  是通过投影点  $(\theta_k^* x_{ik}, y_{rk})$  的一个前沿支撑面<sup>①</sup>。

(1) 如果该投影点处于 CRS 的状态, 则将该投影点的投入和产出同时等比例增加一个很小的幅度 (增加的比例为一个足够小的正数  $\varepsilon$ )<sup>②</sup>, 发生位移之后的投影点将仍然位于通过该点的一个支撑面上, 即符合

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^q \mu_r (1 + \varepsilon) y_{rk} - \sum_{i=1}^m \nu_i \theta_k^* (1 + \varepsilon) x_{ik} - \mu_{0k} \\ &= (1 + \varepsilon) \sum_{r=1}^q \mu_r y_{rk} - (1 + \varepsilon) \sum_{i=1}^m \nu_i \theta_k^* x_{ik} - \mu_{0k} = 0 \end{aligned}$$

① 例如, 在图3-6中, 直线  $BC$  是通过  $B$  点的一个前沿支撑面 (在二维坐标系中为线)。生产可能集位于该支撑面的右侧, 即  $\sum_{r=1}^q \mu_r y_{rk} - \sum_{i=1}^m \nu_i \theta_k^* x_{ik} - \mu_{0k} \leq 0$ 。

② 微量等比例同时增加投影点的投入和产出相当于在图3-6中, 将投影点沿原点与投影点的连线方向作微量延伸。如果该投影点处于 CRS 状态, 则延伸点仍然位于该投影点的其中一个支撑面上 (通过原点的支撑面); 如果该投影点处于 IRS 状态, 则延伸点位于该投影点的支撑面右侧; 如果该投影点处于 DRS 状态, 则延伸点仍然位于该投影点的支撑面左侧。

由  $\sum_{r=1}^q \mu_r y_{rk} - \sum_{i=1}^m \nu_i \theta_k^* x_{ik} - \mu_{0k} = 0$  可得出

$$(1 + \varepsilon) \sum_{r=1}^q \mu_r y_{rk} - (1 + \varepsilon) \sum_{i=1}^m \nu_i \theta_k^* x_{ik} - (1 + \varepsilon) \mu_{0k} = 0$$

因此  $(1 + \varepsilon) \sum_{r=1}^q \mu_r y_{rk} - (1 + \varepsilon) \sum_{i=1}^m \nu_i \theta_k^* x_{ik} - \mu_{0k} = 0$  成立的条件是  $\varepsilon \mu_{0k} = 0$ ，即  $\mu_{0k} = 0$ 。在存在多个最优解时，只要在任一最优解中符合  $\mu_{0k}^* = 0$ ，即说明该投影点处于 VRS 前沿的 CRS 阶段，规模收益状态为 CRS。

(2) 如果该投影点处于 IRS 的状态，则发生位移之后的投影点将位于该支撑面的右侧，即符合  $(1 + \varepsilon) \sum_{r=1}^q \mu_r y_{rk} - (1 + \varepsilon) \sum_{i=1}^m \nu_i \theta_k^* x_{ik} - \mu_{0k} < 0$ 。其对应的条件是  $\varepsilon \mu_{0k} < 0$ ，即  $\mu_{0k} < 0$ 。如果有多个支撑面通过该投影点（乘数模型的线性规划有多个最优解），则发生位移之后的投影点都将位于所有支撑面的右侧，即在所有最优解中  $\mu_{0k}^* < 0$ 。

(3) 如果该投影点处于 DRS 的状态，则发生位移之后的投影点将位于该支撑面的左侧，即符合  $(1 + \varepsilon) \sum_{r=1}^q \mu_r y_{rk} - (1 + \varepsilon) \sum_{i=1}^m \nu_i \theta_k^* x_{ik} - \mu_{0k} > 0$ 。如果有多个支撑面通过该投影点（乘数模型的线性规划有多个最优解），则发生位移之后的投影点都将位于所有支撑面的左侧，即在所有最优解中  $\mu_{0k}^* > 0$ 。

在产出导向模型中，也可做出类似推理。

### 推理 2:

如果边际产出大于平均产出，说明处于 IRS 状态；如果边际产出等于平均产出，说明处于 CRS 状态；如果边际产出小于平均产出，说明处于 DRS 状态。因此通过比较被评价 DMU 在弱有效前沿上投影点的边际产出 (MP) 和平均产出 (AP)，即可判断其规模收益状态。

现在分别将  $\sum_{i=1}^m \nu_i \theta_k^* x_{ik}$  和  $\sum_{r=1}^q \mu_r y_{rk}$  看做一个虚拟的投入和一个虚拟的产出<sup>①</sup>，

$$\text{即 } x = \sum_{i=1}^m \nu_i \theta_k^* x_{ik}, y = \sum_{r=1}^q \mu_r y_{rk} \circ$$

$\sum_{r=1}^q \mu_r y_{rk} - \sum_{i=1}^m \nu_i \theta_k^* x_{ik} - \mu_{0k} = 0$ ，简化记为  $y - x + u_{0k} = 0$ ，是通过该投影点的一个前沿支撑面，从而可以计算该投影点的边际产出为

$$MP = \frac{dy}{dx} = 1$$

根据  $\sum_{r=1}^q \mu_r y_{rk} - \sum_{i=1}^m \nu_i \theta_k^* x_{ik} - \mu_{0k} = 0$  和  $\sum_{i=1}^m \nu_i \theta_k^* x_{ik} = 1$ ，该投入点的平均产出为

<sup>①</sup> 虚拟投入和虚拟产出可理解为，乘数模型中利用权重系数构造的虚拟投入和虚拟产出对应包络模型中对投入或产出等比例变化的约束。

$$AP = \frac{\sum_{r=1}^q \mu_r y_{rk}}{\sum_{i=1}^m \nu_i \theta_k^* x_{ik}} = \sum_{r=1}^q \mu_r y_{rk} = 1 + \mu_{ok}$$

结合规模收益状态的判断规则，可得出投入导向乘数模型判断规模收益的方法（见表3-2）。

表3-2 投入导向乘数模型规模收益状态的判断方法

项目	MP与AP比较	$\mu_0$
IRS	在所有解中 $MP > AP$	在所有解中 $\mu_0^* < 0$
CRS	在任一解中 $MP = AP$	在任一解中 $\mu_0^* = 0$
DRS	在所有解中 $MP < AP$	在所有解中 $\mu_0^* > 0$

通过类似推导过程可得出，在产出导向乘数模型中  $MP = 1$ ,  $AP = \frac{1}{1 - \nu_{ok}}$ ，从而得出判断规模收益状态的方法（见表3-3）。

表3-3 产出导向乘数模型规模收益状态的判断方法

项目	MP与AP比较	$\nu_0$
IRS	在所有解中 $MP > AP$	在所有解中 $\nu_0^* < 0$
CRS	在任一解中 $MP = AP$	在任一解中 $\nu_0^* = 0$
DRS	在所有解中 $MP < AP$	在所有解中 $\nu_0^* > 0$

需要注意的是采用乘数模型方法2时，与包络模型的方法2相一致。在包络模型模型中规划式的右侧是被评价DMU的弱有效目标值。因此，在乘数模型中，需要先对无效DMU作弱有效投影，获得其弱有效目标值，然后求解  $\mu_0$  或  $\nu_0$  最大值和最小值。以投入导向模型为例<sup>①</sup>，

$$\begin{aligned}
 & \max(\min) \mu_0 \\
 \text{s. t. } & \sum_{r=1}^q \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m \nu_i \theta_j^* x_{ij} - \mu_0 \leq 0 \\
 & \sum_{i=1}^m \nu_i \theta_k^* x_{ik} = 1 \\
 & \nu \geq 0; \mu \geq 0; \mu_0 \text{ free} \\
 & i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned} \tag{3-2}$$

①  $\theta^*$  为各DMU的效率值，乘数模型求解的效率值与包络模型求解的效率值相等，即  $\theta_k^* = \sum_{r=1}^q \mu_r^* y_{rk} - \mu_0^*$ 。

表 3-4 总结了包络模型和乘数模型规模收益状态的各种判断方法。MaxDEA 软件判断规模收益状态的规则采用的是方法 3。

表 3-4 规模收益状态的判断方法总表

项目	包络模型		乘数模型	
	投入导向	产出导向	投入导向	产出导向
判断模型	$\min \theta$ $\text{s. t. } \theta x_0 - X\lambda \geq 0$ $Y\lambda \geq y_0$ $\lambda, s^-, s^+ \geq 0$	$\max \phi$ $\text{s. t. } X\lambda \leq x_0$ $-Y\lambda + \varphi y_0 \leq 0$ $\lambda, s^-, s^+ \geq 0$	$\max \mu' y_0 - \mu_0$ $\text{s. t. } \nu' x_0 = 1$ $-\nu' X + (\mu' Y - \mu_0) \leq 0$ $\mu, \nu \geq 0 \text{ or } \mu, \nu \geq \varepsilon$ $\mu_0 \text{ free}$	$\min \nu' x_0 + \nu_0$ $\text{s. t. } \mu' y_0 = 1$ $(\nu' X + \nu_0) - \mu' Y \geq 0$ $\mu, \nu \geq 0 \text{ or } \mu, \nu \geq \varepsilon$ $\nu_0 \text{ free}$
方法 1	1) 在所有最优解中 $e\lambda^* < 1$ , 则为 IRS 2) 在所有最优解中 $e\lambda^* > 1$ , 则为 DRS 3) 在任一最优解中 $e\lambda^* = 1$ , 则为 CRS		1) 在所有最优解中 $\mu_0^* < 0$ ( $\nu_0^* < 0$ ), 则为 IRS 2) 在所有最优解中 $\mu_0^* > 0$ ( $\nu_0^* > 0$ ), 则为 DRS 3) 在任一最优解中 $\mu_0^* = 0$ ( $\nu_0^* = 0$ ), 则为 CRS	
方法 2	1) $e\lambda_{\max}^* < 1$ , 则为 IRS 2) $e\lambda_{\min}^* > 1$ , 则为 DRS 3) 除此之外, 为 CRS		1) $\mu_0^*_{\max} < 0$ ( $\nu_0^*_{\max} < 0$ ), 则为 IRS 2) $\mu_0^*_{\min} > 0$ ( $\nu_0^*_{\min} > 0$ ), 则为 DRS 3) 除此之外, 为 CRS	
方法 3	1) 规模效率 = 1, 则为 CRS 2) 规模效率 < 1 且任一最优解 $e\lambda^* < 1$ , 则为 IRS 3) 规模效率 < 1 且任一最优解 $e\lambda^* > 1$ , 则为 DRS		1) 规模效率 = 1, 则为 CRS 2) 规模效率 < 1 且任一最优解 $\mu_0^* < 0$ ( $\nu_0^* < 0$ ), 则为 IRS 3) 规模效率 < 1 且任一最优解 $\mu_0^* > 0$ ( $\nu_0^* > 0$ ), 则为 DRS	

本节参考文献: Banker, et al., 1984; Banker & Thrall, 1992。

### 3.3 规模弹性

#### 3.3.1 规模弹性的概念

当所有其他变量保持不变时, 如果一个变量的变动会引起另一个变量的变动, 后者变动的比例与前者变动的比例之比值就是后者对前者的弹性 (Elasticity), 用公式表示为

$$E = \frac{\Delta x_2 / x_2}{\Delta x_1 / x_1} \quad (3-3)$$

在生产领域, 当所有其他投入要素保持不变时, 一种投入要素的变动会引起产量的变动, 所引起的产量变动的比例与该种投入要素变动的比例之比值, 称为产出弹性 (Output Elasticity), 或生产弹性 (Production Elasticity), 表示生产中产

品产量变动对生产要素投入量变动的敏感程度。产出弹性的经济意义是,当某一种生产要素增加百分之一时,产出量增加百分之多少。

DEA 评价的往往是多投入多产出的生产过程,DEA 得出的技术无效率是指与生产前沿相比,在产出既定的条件下,被评价 DMU 的各项投入应等比例缩减的比例;或在投入既定的条件下,其各项产出应等比例增加的比例。DEA 所获得的生产前沿是多投入多产出的前沿,在 VRS 模型的生产前沿上,每个点的规模收益状态是随着生产规模的上升而发生变化的。那么对于前沿上的某个具体点而言,其各项投入要素的变动所引起的产量的变动代表了规模收益,用定量的指标表示就是规模弹性 (Scale Elasticity) 或生产规模弹性 (Scale Elasticity in Production)。

简单地说,规模弹性就是对规模收益状态的量化。各项投入指标的等比例变动会引起各项产出指标的等比例变动,规模弹性是指产出指标的等比例变动的比例与投入指标等比例变动的比例之比值。规模弹性是针对生产前沿而言的。当只有一种投入和一种产出时,规模弹性与上述产出弹性所表达的含义相同。当存在多个投入时,其中一种投入的产出弹性又称为偏产出弹性 (Partial Output Elasticity)。

一种投入和一种产出时的产出弹性或规模弹性表示为

$$E = \frac{\Delta y_1 / y_1}{\Delta x_1 / x_1} = \frac{\Delta y_1 / \Delta x_1}{y_1 / x_1} = \frac{MP}{AP} \quad (3-4)$$

即规模弹性等于边际产出与平均产量之比。

以图 3-7 中 VRS 前沿上的 B 点为例,B 点的平均产量等于其产出与投入数值之比,与参数方法不同,DEA 的生产前沿不是平滑曲线,而是分段线性函数。在图 3-7 中 VRS 前沿上的各个顶点处的边际产出不是唯一值,而是具有上方和下方两个边际产出值。例如 B 点的边际产出有两个分别对应 AB 和 BD 的斜率。

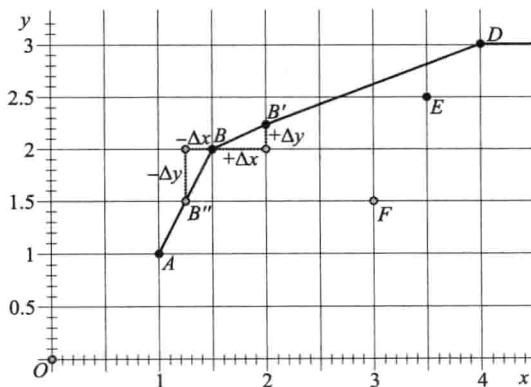


图 3-7 单投入单产出规模弹性示例 (产出导向)

### \* 3.3.2 通过包络模型直接求解规模弹性 (直接法)

通过图示可以看出,由于 DEA 的前沿不是平滑曲线,因此采用在前沿上进行微量移动的方式,可以直接计算规模弹性 (直接法)。例如,在图 3-7 中,通

过将  $B$  点分别向上移动至  $B'$  点和向下移动至  $B''$  点, 然后根据式 (3-4) 即可计算出  $B$  点上方和下方的规模弹性。

那么这种直接计算的方法是否会产生误差呢? 如果上述移动过程中跨过了另外一个顶点, 则会产生误差。例如, 在图 3-8 中,  $B$  点上方的边际产出对应  $BD$  的斜率, 如果移动至  $B_1$  或  $B_2$  点, 则计算的边际产出分别对应  $BB_1$  和  $BB_2$  的斜率。如果移动的距离足够小, 例如  $\Delta x/x = 0.0001$ , 一般可以避免这样的误差。即使在这样微小的移动中跨过了另外的顶点, 其产生的计算误差也会很小。

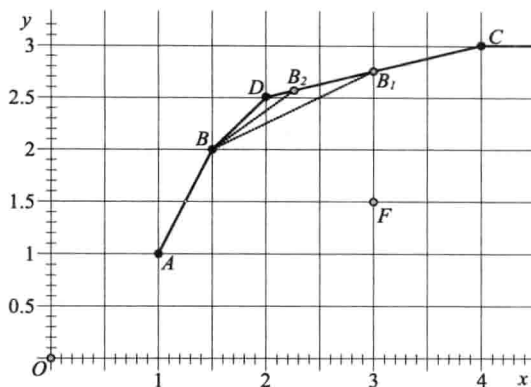


图 3-8 直接法计算规模弹性产生误差示例

两次分别采用不同的移动量来计算  $B$  点上方的边际产出, 例如两次分别移动至  $B_1$  点和  $B_2$  点。如果没有跨过其他顶点, 则  $BB_1$  和  $BB_2$  重合, 两次计算得出的边际产出相等; 如果不重合, 得出的边际产出不等。因此, 在通过直接法计算规模弹性后, 可以通过减小移动量的方式再次计算规模弹性, 来判断移动过程中是否跨过了顶点。例如, 第一次求解移动量  $\Delta x/x = 0.0001$ , 第二次求解移动量  $\Delta x/x = 0.0001 \times 0.5 = 0.00005$ , 如果两次得到的规模弹性值相等, 则说明移动过程中没有跨过其他顶点, 没有计算误差; 否则说明跨过了其他顶点, 产生了微小误差。

这种直接法计算规模弹性的方法同样适用于多投入多产出的情况。规模弹性是针对生产技术而言的, 规模弹性反映的是生产前沿的特征。无效 DMU, 其所处的规模弹性可通过其在前沿上的投影点的规模弹性来代表。因此, 在计算无效 DMU 的规模弹性时, 需先计算其目标值。

通过包络模型直接计算规模弹性既可以用投入导向模型也可以用产出导向模型。产出导向模型计算规模弹性的方法更符合规模弹性的定义, 因此, 先介绍产出导向模型的计算方法。

(1) 通过产出导向包络模型直接求解规模弹性。

以计算  $DMU_k$  的规模弹性为例, 通过产出导向包络模型直接计算规模弹性的步骤如下。

1) 计算所有 DMU 目标值, 此处采用强有效目标值<sup>①</sup>。以  $DMU K$  为例, 求

<sup>①</sup> 如果采用弱有效目标值, 由于投影点所处的前沿部分可能与坐标轴平行, 从而会出现计算得出的上方和下方的规模弹性均为 0 或无穷大。采用强有效目标值时, 如果投影点位于强有效前沿的起始端或末端, 如图 3-7 中的  $A$  点和  $D$  点, 其上方和下方的规模弹性其中一个为 0 或无穷大。在 MaxDEA 软件中, 是采用强有效目标值还是弱有效目标值, 取决于用户在 Result (1) 中对 Projection 选项的设置。



解模型 (3-5), 获得其在前沿的投影点  $K'$ ,

$$\begin{aligned}
 & \max \varphi + \varepsilon \sum (s^- + s^+) \\
 \text{s. t. } & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{ik} \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = \phi y_{rk} \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\
 & \lambda \geq 0; s^- \geq 0; s^+ \geq 0 \\
 & i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n \quad (3-5)
 \end{aligned}$$

投影点  $K'$  的投入和产出向量分别记为

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_{ik} &= x_{ik} - s_i^- \\
 \hat{y}_{ik} &= \varphi^* y_{rk} + s_r^+
 \end{aligned}$$

然后, 在 DEA 模型的数据中, 用目标值替换原始数值。

2) 计算上方的规模弹性。

以 DMU  $K'$  为基础, 将其各项投入等比例微量地增加后构建一个新的 DMU  $K_+$ , 增加的比例记为  $\varepsilon$ , 在实际计算中,  $\varepsilon$  可取一个很小的正数, 例如 0.00001。

DMU  $K_+$  的投入向量为  $x_{ik_+} = (1 + \varepsilon)\hat{x}_{ik}$ , 产出向量  $y_{rk_+} = \hat{y}_{rk}$ 。

将 DMU  $K_+$  加入到 DEA 数据中, 现在共有  $n + 1$  个 DMU。然后求解模型 (3-6)<sup>①</sup>, 获得产出增加的比例  $\beta$ 。

$$\begin{aligned}
 & \max \beta \\
 \text{s. t. } & \sum_{j=1}^n \lambda_j \hat{x}_{ij} \leq x_{ik_+} \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j \hat{y}_{rj} \geq (1 + \beta)y_{rk_+} \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\
 & \lambda_j \geq 0; i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n \quad (3-6)
 \end{aligned}$$

构建一个新的 DMU 的说法只是为了方便理解, 实际上, 上述模型等价于

$$\begin{aligned}
 & \max \beta \\
 \text{s. t. } & \sum_{j=1}^n \lambda_j \hat{x}_{ij} \leq (1 + \varepsilon)\hat{x}_{ik} \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j \hat{y}_{rj} \geq (1 + \beta)\hat{y}_{rk} \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1
 \end{aligned}$$

① DMU  $K_+$  为无效的 DMU, 不参与构建前沿, 因此在参考集中是否包括 DMU  $K_+$  对结果没有影响。

$$\lambda_j \geq 0; i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n \quad (3-7)$$

上方的规模弹性为

$$E_{(\text{上方})} = \beta^* / \varepsilon \quad (3-8)$$

上述计算过程可用图示的方式来解释,如图 3-9 所示。以 DMU  $K'$  为基础,在微量增加投入后构建了一个新的 DMU  $K_+$ , 其投入和产出向量分别为  $(1 + \varepsilon)\hat{x}_k, \hat{y}_k$ 。这个新的 DMU 是以有效 DMU  $K'$  为基础,通过等比例增加投入来构建的,所以这个新的 DMU 必然是无效的。通过求解模型 (3-6) 获得无效 DMU  $K_+$  在前沿上的投影点  $K''$ , 从而可以计算在微量等比例增加投入后,产出增长的比例  $\beta$ 。

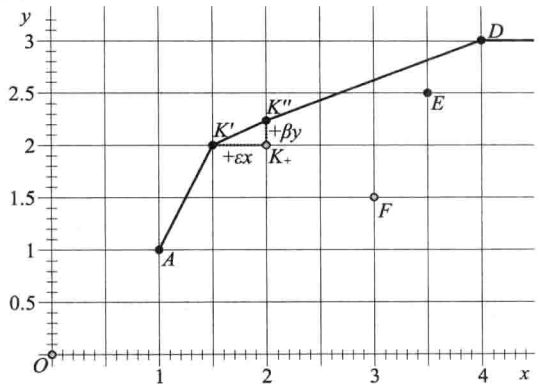


图 3-9 直接法计算上方的规模弹性的步骤 (产出导向)

3) 计算下方的规模弹性。

以 DMU  $K'$  为基础,将其各项投入等比例微量地减少后构建一个新的 DMU  $K_-$ 。

DMU  $K_-$  的投入向量为  $x_{ik_-} = (1 - \varepsilon)\hat{x}_{ik}$ , 产出向量  $y_{rk_-} = \hat{y}_{rk}$ 。

将 DMU  $K_-$  加入到 DEA 数据中,现在共有  $n + 1$  个 DMU。然后求解模型 (3-9), 获得产出减少的比例  $\beta$ 。DMU  $K_-$  位于前沿以外,在模型 (3-9) 中,必须将其从参考集中排除,因此,参考集中的 DMU 共有  $n$  个,不是  $n + 1$  个<sup>①</sup>。

$$\begin{aligned} & \min \beta \\ \text{s. t. } & \sum_{j=1}^n \lambda_j \hat{x}_{ij} \leq x_{ik_-} \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j \hat{y}_{rj} \geq (1 - \beta) y_{rk_-} \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\ & \lambda_j \geq 0; i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3-9)$$

上述模型相当于

$$\begin{aligned} & \min \beta \\ \text{s. t. } & \sum_{j=1}^n \lambda_j \hat{x}_{ij} \leq (1 - \varepsilon) \hat{x}_{ik} \end{aligned}$$

<sup>①</sup> 这样的将被评价 DMU 排除在参考集之外的模型被称为超效率 (Super-efficiency) 模型, 详见本书后面章节的详细介绍。

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \lambda_j \hat{y}_{rj} &\geq (1 - \beta) \hat{y}_{rk} \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j &= 1 \\ \lambda_j &\geq 0; i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3-10)$$

下方的规模弹性为

$$E_{(\text{下方})} = \beta^* / \varepsilon \quad (3-11)$$

图3-10演示了上述求解过程，以DMU  $K'$ 为基础，在微量减少投入后构建了一个新的DMU  $K_-$ ，其投入和产出向量分别为  $(1 - \varepsilon)\hat{x}_k, \hat{y}_k$ 。通过求解模型获得其在前沿（由除  $K_-$ 之外的其他  $n$ 个DMU构成的前沿）上的投影点  $K''$ ，从而可以计算在微量等比例减少投入后，产出减少的比例  $\beta$ 。

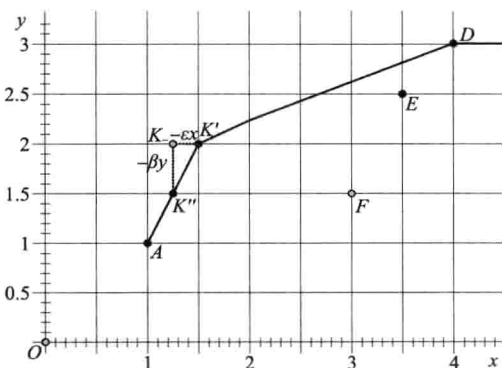


图3-10 直接法计算下方的规模弹性的步骤（产出导向）

(2) 通过投入导向包络模型直接求解规模弹性。

通过投入导向模型计算规模弹性的原理与利用产出导向模型求解的原理相似，区别在于，通过投入导向模型，是先等比例微量增加（或减少）产出，然后求解投入增加（或减少）的比例。计算步骤简述如下<sup>①</sup>。

1) 求解模型(3-12)，计算所有DMU目标值。

$$\begin{aligned} \min \theta - \varepsilon \sum (s^- + s^+) \\ \text{s. t. } \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- &= \theta x_{ik} \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ &= y_{rk} \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j &= 1 \\ \lambda &\geq 0; s^- \geq 0; s^+ \geq 0; \theta \text{ free} \\ i &= 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3-12)$$

① “通过产出导向包络模型直接求解规模弹性”中的步骤分解是为了易于理解，实际计算时可简化。

投影点  $K'$  的投入和产出向量分别记为

$$\begin{aligned}\hat{x}_{ik} &= \theta^* x_{ik} - s_i^- \\ \hat{y}_{rk} &= y_{rk} + s_r^+\end{aligned}$$

然后, 在 DEA 模型的数据中, 用目标值替换原始数值。

2) 计算上方的规模弹性。

求解模型 (3-13), 获得在产出微量等比例 ( $\varepsilon$ ) 增加后, 投入增加的比例  $\alpha$ 。

$$\begin{aligned}\min & \alpha \\ \text{s. t.} & \sum_{j=1}^n \lambda_j \hat{x}_{ij} \leq (1 + \alpha) \hat{x}_{ik} \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j \hat{y}_{rj} \geq (1 + \varepsilon) \hat{y}_{rk} \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\ & \lambda_j \geq 0; \quad i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n\end{aligned} \quad (3-13)$$

上方的规模弹性为

$$E_{(\text{上方})} = \varepsilon^* / \alpha \quad (3-14)$$

3) 计算下方的规模弹性。

求解模型 (3-15), 获得在产出微量等比例减少之后, 投入减少的比例  $\alpha$ 。

$$\begin{aligned}\max & \alpha \\ \text{s. t.} & \sum_{j=1}^n \lambda_j \hat{x}_{ij} \leq (1 - \alpha) \hat{x}_{ik} \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j \hat{y}_{rj} \geq (1 - \varepsilon) \hat{y}_{rk} \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\ & \lambda_j \geq 0; \quad i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n\end{aligned} \quad (3-15)$$

下方的规模弹性为

$$E_{(\text{下方})} = \varepsilon / \alpha^* \quad (3-16)$$

### 3.3.3 通过乘数模型求解规模弹性 (虚拟投入产出法)

在前面“通过乘数模型判断规模收益状态”的推理 2 中介绍了计算投影点的边际产出和平均产出的方法。规模弹性等于边际产出与平均产出之比, 即

$$E = MP/AP。$$

在产出导向模型中

$$MP = \frac{dy}{dx} = 1$$

$$AP = \frac{\sum_{r=1}^q \mu_r \varphi_k^* y_{rk}}{\sum_{i=1}^m \nu_i x_{ik}} = \frac{\sum_{r=1}^q \mu_r \varphi_k^* y_{rk}}{\sum_{r=1}^q \mu_r \varphi_k^* y_{rk} - \nu_{ok}} = \frac{1}{1 - \nu_{ok}}$$

$$E = \frac{MP}{AP} = \frac{1}{\frac{1}{1 - \nu_{ok}}} = 1 - \nu_{ok}$$

通过求解模型 (3-17), 即可获得  $\nu_0$  的最小 (最大) 值, 从而可以计算规模弹性的最大 (最小) 值

$$\begin{aligned} & \min(\max) \nu_0 \\ \text{s. t. } & \sum_{r=1}^q \mu_r \varphi_j^* y_{rj} - \sum_{i=1}^m \nu_i x_{ij} - \nu_0 \leq 0 \\ & \sum_{r=1}^q \mu_r \varphi_k^* y_{rk} = 1 \\ & \nu \geq 0; \mu \geq 0; \nu_0 \text{ free} \\ & i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3-17)$$

$$E_{\max} = 1 - \nu_{0, \min}^*$$

$$E_{\min} = 1 - \nu_{0, \max}^*$$

同理, 在投入导向模型中,

$$MP = \frac{dy}{dx} = 1$$

$$AP = \frac{\sum_{r=1}^q \mu_r y_{rk}}{\sum_{i=1}^m \nu_i \theta_k^* x_{ik}} = \frac{\sum_{i=1}^m \nu_i \theta_k^* x_{ik} + \mu_{ok}}{\sum_{i=1}^m \nu_i \theta_k^* x_{ik}} = 1 + \mu_{ok}$$

$$E = \frac{MP}{AP} = \frac{1}{1 + \mu_{ok}}$$

通过求解以下模型, 即可获得  $\mu_0$  的最小 (最大) 值, 从而可以计算规模弹性的最大 (最小) 值

$$\begin{aligned} & \min(\max) \mu_0 \\ \text{s. t. } & \sum_{r=1}^q \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m \nu_i \theta_j^* x_{ij} - \mu_0 \leq 0 \\ & \sum_{r=1}^q \nu_i \theta_k^* x_{ik} = 1 \\ & \nu \geq 0; \mu \geq 0; \mu_0 \text{ free} \\ & i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3-18)$$

$$E_{\max} = 1 - \mu_{0, \min}^*$$

$$E_{\min} = 1 - \mu_{0, \max}^*$$

通过乘数模型计算规模弹性的理论方法参见文献 Banker & Thrall, 1992;

Forsund & Hjalmarsson, 2004; Fukuyama, 2000; Tone K. & Sahoo, 2004。

通过包络模型和乘数模型计算的规模弹性之间的关系如下：

$$E_{(上方)} = E_{\min}$$

$$E_{(下方)} = E_{\max}$$

### 3.4 用 MaxDEA 求解规模收益状态和规模弹性示例

选择径向模型 (Distance: Radial, 见图 3-11), 然后在模型设置的 RTS 选项中, 选择最后一项 “Scale Efficiency or Scale Effect” (见图 3-12), 软件会提供各 DMU 所处的规模收益状态 (RTS)。如果勾选 “Scale Elasticity”, 则还会提供规模弹性。在包络模型中, 还可以设置直接法计算规模弹性的  $\varepsilon$  值 (见图 3-13), 该值表示在产出导向模型中, 投入微量增加或减少的比例; 在投入导向模型中, 产出微量增加或减少的比例。建议采用 0.00001 ~ 0.01 的数值。

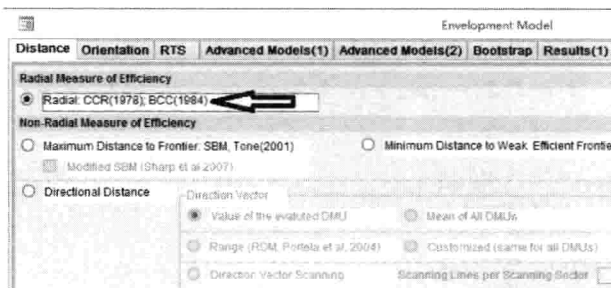


图 3-11 Distance 设置

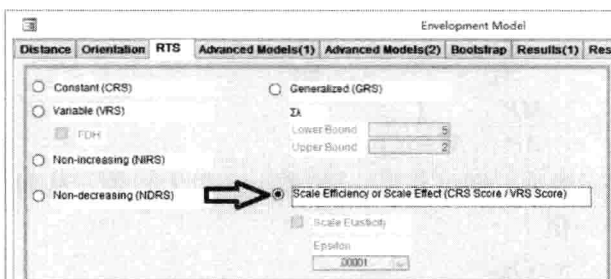
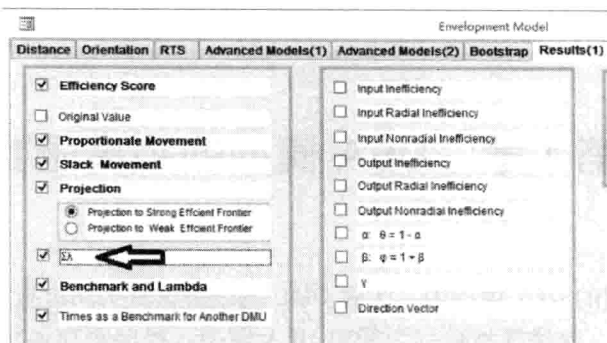


图 3-12 RTS 设置

包络模型提供两个规模弹性值, 投影点下方的规模弹性和上方的规模弹性, 分别对应乘数模型的规模弹性上限和规模弹性下限。

表 3-5 是采用表 2-6 的数据, 通过产出导向包络模型和乘数模型得出的部分省份的规模收益状态和规模弹性。注意, 表中显示的用于判断 RTS 状态的  $\Sigma\lambda$  和  $v_0$  是分别通过 CRS 包络模型和 VRS 乘数模型获得的 (需要在 Result (1) 选项中勾选  $\Sigma\lambda$ ), 在选择 “Scale Efficiency or Scale Effect” 时并不提供这两个结果指标。

图 3-13 设置  $\epsilon$  值

在表 3-5 规模弹性结果中有两个特殊值，一个是广东的规模弹性（上方）为 0，说明广东处于样本 DMU 生产规模的上限，没有其他 DMU 的规模在其之上<sup>①</sup>；另一个是西藏的规模弹性（下方）为  $1E+30$ ，规模弹性如果出现极大的数值，说明该 DMU 的投影点处于样本生产规模的下限，没有其他 DMU 的规模在其之下<sup>②</sup>。

表 3-5 通过产出导向模型计算的规模收益状态和规模弹性

DMU	包络模型				乘数模型			
	$\Sigma\lambda$	规模收益	规模弹性 (下方)	规模弹性 (上方)	$\nu_0$ <sup>③</sup>	规模收益	规模弹性 (上限)	规模弹性 (下限)
安徽	1.4989	Decreasing	0.9287	0.9265	0.0768	Decreasing	0.9287	0.9265
北京	1.0005	Decreasing	1.0324	0.7769	0.1359	Decreasing	1.0324	0.7769
福建	1.0000	Constant	1.0332	0.8907	0.0000	Constant	1.0332	0.8907
甘肃	0.5977	Increasing	1.0443	1.0443	-0.0523	Increasing	1.0443	1.0443
广东	1.0000	Constant	1.0117	0.0000	0.0194	Constant	1.0117	0.0000
广西	1.0797	Decreasing	0.9203	0.9198	0.0800	Decreasing	0.9203	0.9198
贵州	0.8119	Increasing	1.0368	1.0358	-0.0379	Increasing	1.0368	1.0358
海南	0.2400	Increasing	1.1566	1.1513	-0.1680	Increasing	1.1566	1.1513
河北	2.0273	Decreasing	0.8662	0.7964	0.2154	Decreasing	0.8662	0.7964
河南	2.5748	Decreasing	0.7846	0.6745	0.2221	Decreasing	0.7846	0.6745
黑龙江	1.4022	Decreasing	0.9242	0.9209	0.1127	Decreasing	0.9242	0.9209
西藏	0.0592	Increasing	$1E+30$	1.4966	-0.4966	Decreasing	$1E+30$	1.4966

① 类似图 3-9 中 D 点的情况，D 点处于前沿的最上端，其上方的边际产出无法计算（如果计算，则得出的上方的边际产出为 0）。

② 类似图 3-9 中 A 点的情况，下方的边际产出无法计算（如果计算，则得出的下方的边际产出为无穷大）。

③  $\nu_0$  往往存在多个最优解，表中显示的是其中一个最优解。

## 第4章 DEA模型的距离函数

在前面介绍的 DEA 模型中,无效 DMU 的改进方式为所有投入(产出)等比例缩减(增加),这类模型被称为径向 DEA 模型。径向距离函数是 DEA 模型的距离函数类型之一。除此之外,常用的距离函数类型还有至前沿最远距离函数(SBM 模型)、至强有效前沿最近距离函数、方向距离函数、至弱有效前沿最近距离函数、混合距离函数、成本函数等。

### 4.1 至前沿最远距离(SBM 模型)

#### 4.1.1 SBM 模型

在径向 DEA 模型中,对无效率程度的测量只包含了所有投入(产出)等比例缩减(增加)的比例。对于无效 DMU 来说,其当前状态与强有效目标值之间的差距,除了等比例改进的部分之外,还包括松弛改进的部分。而松弛改进的部分在效率值的测量中并未得到体现。出于这样的考虑,Tone Kaoru (2001)提出了 SBM 模型(Slack Based Measure, SBM)<sup>①</sup>。

$$\begin{aligned} \min \rho &= \frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_i^- / x_{ik}}{1 + \frac{1}{q} \sum_{r=1}^q s_r^+ / y_{rk}} \\ \text{s. t. } X\lambda + s^- &= x_k \\ Y\lambda - s^+ &= y_k \\ \lambda, s^-, s^+ &\geq 0 \end{aligned} \quad (4-1)$$

SBM 模型采用  $\rho^*$  表示被评价 DMU 的效率值,它同时从投入和产出两个角度来对无效率状况进行测量,因此称为非导向(Non-oriented)模型。在非导向 SBM 模型中,投入和产出数据中均不能出现 0。

在 SBM 模型中,投入和产出的无效率分别体现为

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_i^- / x_{ik}, \frac{1}{q} \sum_{r=1}^q s_r^+ / y_{rk}$$

如果 SBM 模型的效率值( $\rho^*$ )等于 1,则说明被评价 DMU 为强有效,不存在径向模型的弱有效问题。被评价 DMU<sub>k</sub> 的投影值(目标值)为

<sup>①</sup> 为了使公式更加简洁,采用矩阵形式表示。



$$\hat{x}_k = x_k - s^-; \hat{y}_k = y_k + s^+$$

在径向模型中, 无效率用所有投入(产出)可以等比例缩减(增加)的程度来测量; 而在 SBM 模型中, 无效率则用各项投入(产出)可以缩减(增加)的平均比例来衡量。

SBM 模型的优点是解决了径向模型对无效率的测量没有包含松弛变量的问题, 但 SBM 模型也存在明显的缺点。SBM 模型的目标函数是使效率值  $\rho$  最小化, 也就是使投入和产出的无效率值最大化。从距离函数的角度去考虑, 被评价 DMU 的投影点是前沿上距离被评价 DMU 最远的点, 这是 SBM 模型的缺点和不合理之处。从被评价者的角度来看, 希望以最短的路径达到前沿, SBM 模型提供的目标值显然与此相背。

非导向的 SBM 模型是非线性规划, 可按以下步骤转化为线性规划。

(1) 令  $t = \frac{1}{1 + \frac{1}{q} \sum_{r=1}^q s_r^+ / y_{rk}}$ , 模型 (4-1) 转换为

$$\begin{aligned} \min \rho &= t - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m ts_i^- / x_{ik} \\ \text{s. t. } X t \lambda + ts^- - tx_k &= 0 \\ Y t \lambda - ts^+ - ty_k &= 0 \\ t &= \frac{1}{1 + \frac{1}{q} \sum_{r=1}^q s_r^+ / y_{rk}} \\ \lambda, s^-, s^+ &\geq 0 \end{aligned} \quad (4-2)$$

(2) 令  $S^- = ts^-; S^+ = ts^+; \Lambda^- = t\lambda^-$ , 模型进一步转换为以下线性规划

$$\begin{aligned} \min \rho &= t - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_i^- / x_{ik} \\ \text{s. t. } X \Lambda + S^- - tx_k &= 0 \\ Y \Lambda - S^+ - ty_k &= 0 \\ t + \frac{1}{q} \sum_{r=1}^q S_r^+ / y_{rk} &= 1 \\ \lambda, s^-, s^+ &\geq 0 \end{aligned} \quad (4-3)$$

在模型 (4-1) 的目标函数中, 如果分别只取分子和分母, 则分别为投入导向和产出导向的 SBM 模型。

投入导向 SBM 模型为

$$\begin{aligned} \min \rho &= 1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_i^- / x_{ik} \\ \text{s. t. } X \lambda + s^- &= x_k \\ Y \lambda &\geq y_k \\ \lambda, s^- &\geq 0 \end{aligned} \quad (4-4)$$

在投入导向 SBM 模型中，投入数据中不能出现 0。

产出导向 SBM 模型为

$$\begin{aligned} \min \rho &= \frac{1}{1 + \frac{1}{q} \sum_{r=1}^q s_r^+ / y_{rk}} \quad \text{或} \quad \max \frac{1}{\rho} = 1 + \frac{1}{q} \sum_{r=1}^q s_r^+ / y_{rk} \\ \text{s. t. } X\lambda &\leq x_k \\ Y\lambda - s^+ &= y_k \\ \lambda, s^+ &\geq 0 \end{aligned} \quad (4-5)$$

在产出导向 SBM 模型中，产出数据中不能出现 0。

投入导向的 SBM 模型与 Färe Rolf & Knox Lovell (1978) 提出的 Russell 投入导向效率测量方法等价，但 SBM 模型的表述方式更容易理解。

表 4-1 总结了 3 种导向的 SBM 模型的规划式。

表 4-1 各类 SBM 模型的规划式

模型	投入导向	产出导向	非导向
CRS	$\min \rho = 1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_i^- / x_{ik}$ $\text{s. t. } X\lambda + s^- = x_k$ $Y\lambda \geq y_k$ $\lambda, s^- \geq 0$	$\max \frac{1}{\rho} = 1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s s_r^+ / y_{rk}$ $\text{s. t. } X\lambda \leq x_k$ $Y\lambda - s^+ = y_k$ $\lambda, s^+ \geq 0$	$\min \rho = \frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_i^- / x_{ik}}{1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s s_r^+ / y_{rk}}$ $\text{s. t. } X\lambda + s^- = x_k$ $Y\lambda - s^+ = y_k$ $\lambda, s^-, s^+ \geq 0$
VRS		$e\lambda = 1$	
NDRS		$e\lambda \geq 1$	
NIRS		$e\lambda \leq 1$	
GRS		$L \sum \lambda \leq e\lambda \leq U \sum \lambda$	

径向模型和 SBM 模型求解的效率值均存在以下关系：VRS 效率值  $\geq$  CRS 效率值。

在径向模型中，通过两者的数量关系可以计算规模效率值：规模效率值 = CRS 效率值 / VRS 效率值 ( $SE = TE / PTE$ )。或者说 CRS 效率值可以进行分解：径向 CRS 效率值 = 径向 VRS 效率值  $\times$  规模效率值 ( $TE = PTE \times SE$ )

根据规模收益的定义，规模效率应采用径向模型计算。在 SBM 模型及其他距离函数模型中，CRS 效率值与 VRS 效率值的比值，在本书和 MaxDEA 软件中称之为“规模效应” (Scale Effect)，以示区别。

对于同一被评价 DMU，其投入和产出导向 SBM 效率值均大于或等于非导向 SBM 效率值。

#### 4.1.2 加权 SBM 模型

在 SBM 模型中，各投入（产出）指标在效率测量中的重要程度是相同的。

根据 Tone Kaoru (2001) 的理论, 在 SBM 模型的基础上, 可以给各项投入和产出指标赋予不同的权重, 以示不同指标重要性的差异。加权处理后被评价 DMU 的有效性不受影响, 即 SBM 模型和加权 SBM 模型评价为有效 DMU 是相同的, 但无效 DMU 的效率值及其投影值会发生改变。

非导向加权 SBM (Weighted SBM, SBM with Preference) 模型表示为

$$\begin{aligned} \min \rho = & \frac{1 - \frac{1}{\sum_{i=1}^m w_i^1} \sum_{i=1}^m w_i^1 s_i^- / x_{ik}}{1 + \frac{1}{\sum_{r=1}^q w_r^0} \sum_{r=1}^q w_r^0 s_r^+ / y_{rk}} \\ \text{s. t. } & X\lambda + s^- = x_k \\ & Y\lambda - s^+ = y_k \\ & \lambda, s^-, s^+ \geq 0 \end{aligned} \quad (4-6)$$

$w^1$  和  $w^0$  表示投入和产出指标的权重。

投入导向加权 SBM 模型表示为

$$\begin{aligned} \min \rho = & 1 - \frac{1}{\sum_{i=1}^m w_i^1} \sum_{i=1}^m w_i^1 s_i^- / x_{ik} \\ \text{s. t. } & X\lambda + s^- = x_k \\ & Y\lambda \geq y_k \\ & \lambda, s^-, s^+ \geq 0 \end{aligned} \quad (4-7)$$

产出导向加权 SBM 模型表示为

$$\begin{aligned} \min \rho = & \frac{1}{1 + \frac{1}{\sum_{r=1}^q w_r^0} \sum_{r=1}^q w_r^0 s_r^+ / y_{rk}} \\ \text{s. t. } & X\lambda \leq x_k \\ & Y\lambda - s^+ = y_k \\ & \lambda, s^+ \geq 0 \end{aligned} \quad (4-8)$$

### 4.1.3 MSBM 模型

MSBM (Modified Slack Based Measure) 是由 Sharp 等人 (2007) 提出的一种 SBM 模型的变种, 它在目标函数中采用被评价 DMU 各项投入或产出最大可能的改进值作为计算其无效率程度的分母, 即

$$\begin{aligned} \min \rho = & \frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_i^- / R_{ik}}{1 + \frac{1}{q} \sum_{r=1}^q s_r^+ / R_{rk}} \\ \text{s. t. } & X\lambda + s^- = x_k \\ & Y\lambda - s^+ = y_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e\lambda &= 1 \\
 \lambda, s^-, s^+ &\geq 0 \\
 R_{ik} &= x_{ik} - \min(x_i) \\
 R_{rk} &= \max(y_r) - y_{rk}
 \end{aligned} \tag{4-9}$$

MSBM 与 SBM 模型相比, 其优势在于允许投入和产出指标中包含负数, 但其缺陷是只能应用于 VRS 模型, 不适用于 CRS 模型<sup>①</sup>。

对投入和产出指标进行加权处理的 MSBM 模型表示为

$$\begin{aligned}
 \min \rho &= \frac{1 - \frac{1}{\sum w_i^l} \sum_{i=1}^m w_i^l s_i^- / R_{ik}}{1 + \frac{1}{\sum w_r^o} \sum_{r=1}^q w_r^o s_r^+ / R_{rk}} \\
 \text{s. t. } X\lambda + s^- &= x_k \\
 Y\lambda - s^+ &= y_k \\
 e\lambda &= 1 \\
 \lambda, s^-, s^+ &\geq 0
 \end{aligned} \tag{4-10}$$

#### \*4.1.4 投影值约束 SBM 模型

SBM 模型的投影点是前沿上距离被评价 DMU 最远的点, 这是 SBM 不合理之处。如果在 SBM 模型的基础上增加对投影的约束, 例如根据决策偏好, 对两项投入 (或产出) 的投影值之间的比值进行限制, 使其处于一定数值范围内, 则一方面可以使投影值更加符合决策者的偏好, 另一方面可以在一定程度上缓解 SBM 模型的上述缺陷。

以对投入 1 和投入 2 的投影值 (目标值) 进行约束为例, 投影值约束 SBM 模型 (Restricted Projection SBM, RSBM) 表示为

$$\begin{aligned}
 \min \rho &= \frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_i^- / x_{ik}}{1 + \frac{1}{q} \sum_{r=1}^q s_r^+ / y_{rk}} \\
 \text{s. t. } X\lambda + s^- &= x_k \\
 Y\lambda - s^+ &= y_k \\
 R_L &\leq \frac{x_{1k} - s_1^-}{x_{2k} - s_2^-} \leq R_U \\
 \lambda, s^-, s^+ &\geq 0
 \end{aligned} \tag{4-11}$$

$R_L$  和  $R_U$  分别表示两项指标投影值比值的下限和上限。

同理, 可对产出之间的投影值进行约束, 也可对投入和产出之间的值进行约

<sup>①</sup> 在 CRS 和 NIRS 模型中, 被评价 DMU<sub>k</sub> 投入指标的最大可能的改进值可能会超过  $R_{ik}$ , 即  $s_{ik} > R_{ik}$ , 从而可能使目标函数为负数。因此, MSBM 模型不适用于 CRS 和 NIRS 模型。

束；而且，也可以在目标函数中，对投入和产出的权重进行设置，在此不再赘述。

需要注意：①SBM有效DMU，其投影值为其自身，投入和产出指标之间的比值是固定的，没有选择的余地，因此投影约束SBM模型并不适用于SBM有效DMU；②当比值的上限和下限设置不当时，例如上限和下限均超出可行解中该两项指标比值的范围，则会造成模型无解。可通过本书后面介绍的方向向量扫描模型，先了解两项指标投影值的比值可能的取值范围，然后再设置上限和下限（扫描间隔选择 $90^\circ$ 即可）。

#### 4.1.5 MaxDEA 求解 SBM 模型和加权 SBM 模型示例

通过MaxDEA软件求解SBM模型的方法与求解径向模型的方法基本相同，不同之处包括以下几点。

(1) 在Distance选项中选择Maximum Distance to Frontier: SBM, Tone (2001)。如果要运行MSBM模型，可勾选下面的Modified SBM选项<sup>①</sup>（见图4-1）。

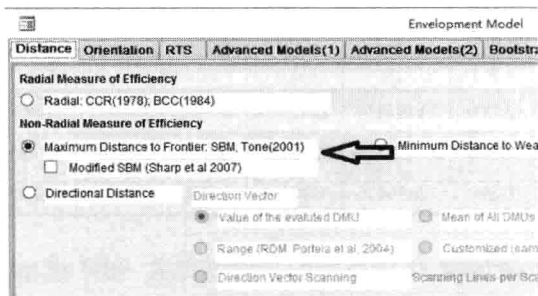


图4-1 SBM模型设置

(2) SBM的投影值均为强有效目标值，所以在Result(1)选项中，Projection的两个选项对SBM模型无效，无论选择Projection to Strong Efficient还是Projection to Weak Efficient，SBM模型输出的都是强有效目标值。

(3) SBM模型的乘数形式不像径向模型的乘数形式那样具有明确的含义，因此MaxDEA没有提供SBM的乘数模型，但在包络模型的结果中提供了对偶解。

我们仍然采用表2-6的数据，来比较一下径向模型和SBM模型的结果。SBM的投影点是前沿上距离被评价DMU最远的点，因此两种模型计算的效率值存在以下关系：

SBM的效率值 $\leq$ 径向模型的效率值

在表4-2的结果中，除6个有效DMU的效率值两者相等之外，SBM模型得出的效率值均小于径向模型得出的效率值。

SBM模型中的“距离”是指各项投入（产出）指标改进的平均比例，因此，

<sup>①</sup> 虽然MSBM不适用于CRS和NIRS模型，但在MaxDEA软件中，用户仍然可以选择CRS和NIRS，但仅为用户提供测试目的。

投入（产出）导向 SBM 模型和投入（产出）导向径向模型获得的目标值中，各项投入（产出）的改进比例存在以下关系：

SBM 模型的平均改进比例  $\geq$  径向模型的平均改进比例

平均改进比例高并不等于每项投入（产出）的改进比例都高。以投入导向模型为例，DEA 模型的前沿为凸多面体，因此，强有效前沿上的任意两点相比，不会存在一个点的所有投入均低于（或高于）另一点的情况。在本例数据中，有两项投入，强有效前沿上的任意两点相比，如果一个点的第一种投入低于另一个点的第一种投入，则该点的第二种投入必然会高于另一个点的第二种投入。表 4-2 的结果反映了这一规律：SBM 模型的投影点和径向模型的投影点都是前沿上的投影点（两个投影点有可能重合），如果 SBM 模型的床位数低于径向模型的床位数，则 SBM 模型的卫技人员数必然会高于径向模型的卫技人员数。

表 4-2 径向模型与 SBM 模型的效率值和目标值比较（投入导向 CRS）<sup>①</sup>

DMU	径向模型					SBM 模型				
	效率值	床位数 (个)	卫技 人员数 (人)	诊疗 人次数 (人次)	入院 人数 (人)	效率值	床位数 (个)	卫技 人员数 (人)	诊疗 人次数 (人次)	入院 人数 (人)
安徽	0.944	133136	125338	74967434	4391516	0.933	140997	114824	63344221	4391516
北京	0.917	80363	87385	104340626	2095434	0.798	80363	87385	104340626	2095434
福建	1.000	89947	93898	72059496	3087618	1.000	89947	93898	72059496	3087618

MaxDEA 软件求解加权 SBM 模型的步骤就是在 SBM 模型设置的基础上，增加权重设置。在“Advanced Model (1)”设置界面，勾选“Preference (Weighted)”，点击“Define”按钮，设置各项投入和产出指标的权重。投入指标和产出指标的权重是相互独立的，在此将两个投入指标的权重设置为 1 和 2，两个产出指标的权重设置为 1 和 5（见图 4-2）。如果将两个投入指标的权重设置为 0.5 和 1，两个产出指标的权重设置为 2 和 10，效果是相同的。非导向 SBM 模型和加权 SBM 模型的结果比较见表 4-3。

表 4-3 SBM 模型与加权 SBM 模型的效率值和目标值比较（非导向 CRS）

DMU	SBM					加权 SBM				
	效率值	床位数 (个)	卫技 人员数 (人)	诊疗 人次数 (人次)	入院 人数 (人)	效率值	床位数 (个)	卫技 人员数 (人)	诊疗 人次数 (人次)	入院 人数 (人)
安徽	0.7038	140997	132739	116649529	4391516	0.8696	140997	116123	83884325	4391516
北京	0.7164	87596	103025	104589875	2845602	0.6075	87596	102941	104340626	2846770
福建	1.0000	89947	93898	72059496	3087618	1.0000	89947	93898	72059496	3087618

① 原始投入产出数据见表 2-6；径向模型的目标值为强有效目标值。

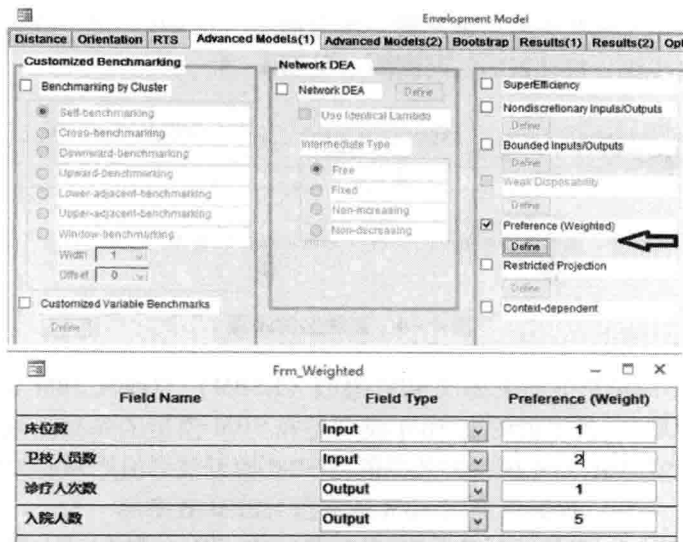


图 4-2 加权 SBM 模型权重设置

#### 4.1.6 MaxDEA 求解投影值约束 SBM 模型示例

通过 MaxDEA 软件求解投影值约束 SBM 模型的方法是在（加权）SBM 模型的基础上，增加对投影值的比值约束。采用非导向 CRS 模型，投入和产出指标权重仍然分别设置为 1:2 和 1:5。在 Advanced Models (1) 界面，勾选 Restricted Projection。点击 Define 打开比值区间设置界面，将卫技人员数投影值与床位数投影值之比值区间设置为  $[0.9, 1.1]$ （见图 4-3）。

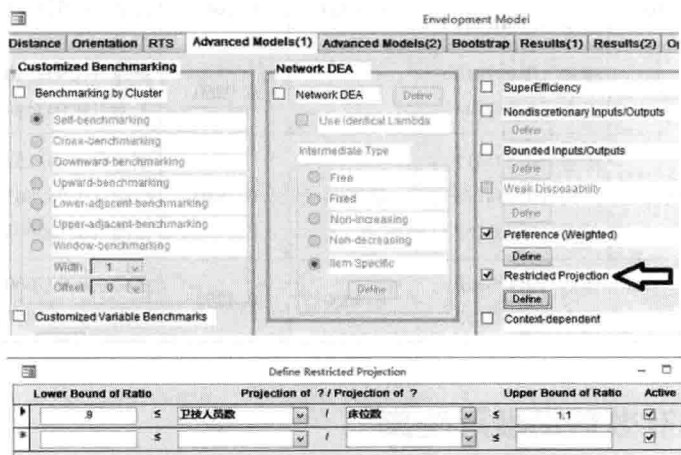


图 4-3 约束 SBM 模型权重设置

如果设置多项比值区间后想删除一项或多项区间设置，可以取消右侧的 Active 复选框，并不需要进行删除操作。如要删除，在左侧箭头处点击右键→剪

切即可。或者在左侧箭头处点击左键，然后通过〈Delete〉键，或者用工具栏上的剪切或删除按钮，将设置的区间删除（见图 4-4）。

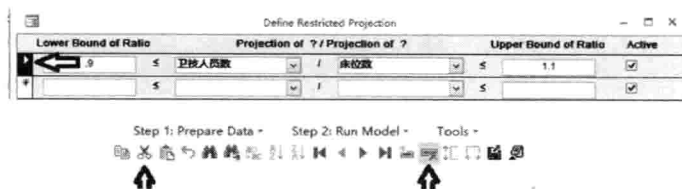


图 4-4 删除区间设置

表 4-4 是对投影值约束加权 SBM 模型（RSBM）与加权 SBM 模型结果的比较（非导向模型）。投影值约束 SBM 模型是在 SBM 模型的基础上增加了约束条件，因此投影值约束 SBM 模型的效率值与 SBM 模型效率值之间的关系为：

$$\text{投影值约束 SBM 效率值} \geq \text{SBM 效率值}$$

表 4-4 加权 SBM 模型与投影值约束加权 SBM 模型的结果比较

DMU	投影值约束 SBM			SBM		
	效率值	参考标杆	投入比值	效率值	参考标杆	投入比值
安徽	0.8744	福建 (0.881443); 云南 (0.488560)	0.9000	0.8696	福建 (0.517156); 云南 (0.747956)	0.8236
北京	0.6402	广东 (0.161612); 上海 (0.471975); 云南 (0.051544)	1.1000	0.6075	福建 (0.007053); 广东 (0.353430)	1.1752
甘肃	0.8265	福建 (0.369026); 云南 (0.204541)	0.9000	0.8043	云南 (0.527724)	0.7151
广西	0.9260	福建 (0.997910); 云南 (0.047444)	1.0233	0.9260	福建 (0.997910); 云南 (0.047444)	1.0233
贵州	0.8661	福建 (0.271412); 广东 (0.054778); 云南 (0.309785)	0.9000	0.8640	福建 (0.131157); 广东 (0.082863); 云南 (0.365603)	0.8845
海南	0.7286	福建 (0.133576); 云南 (0.074037)	0.9000	0.7254	福建 (0.077660); 云南 (0.113853)	0.8226

## 4.2 至强有效前沿最近距离

### 4.2.1 非导向至强有效前沿最近距离的计算方法

为方便表述，将至强有效前沿最近距离模型（Minimum Distance to Strong Efficient Frontier）简称为 MinDS 模型。

既然 SBM 模型采用强有效前沿上最远的投影点存在明显的不合理之处，我



们很容易想到克服这一缺陷的方法就是采用强有效前沿上距离最近的点作为投影点。那么如何实现这一想法呢?

如果在SBM模型(4-1)的目标函数中把最小化(min)改为最大化(max)是否就能得到强有效前沿上最近的投影点呢?

$$\begin{aligned} \max \rho &= \frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_i^- / x_{ik}}{1 + \frac{1}{q} \sum_{r=1}^q s_r^+ / y_{rk}} \\ \text{s. t. } & X\lambda + s^- = x_k \\ & Y\lambda - s^+ = y_k \\ & \lambda, s^-, s^+ \geq 0 \end{aligned} \quad (4-12)$$

求解模型(4-12)即可知道,这一简单的想法不可行。求解这个模型的结果必然是所有松弛变量均为0,所有被评价DMU的效率值均为1,所有被评价DMU的参考标杆和目标值均为其自身。这是因为 $\lambda_k = 1, \lambda_j = 0 (j \neq k), s^- = 0, s^+ = 0$ 是模型(4-12)的一个最优解。

如果在模型(4-12)中将参考集限定为有效DMU是否可行呢?即采用两阶段的方法,在第一阶段,求解SBM模型(4-1),确定所有有效DMU,记为DMU集合 $E = \{j \mid \rho_j = 1\}$ ;然后在第二阶段,求解模型

$$\begin{aligned} \max \rho &= \frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_i^- / x_{ik}}{1 + \frac{1}{q} \sum_{r=1}^q s_r^+ / y_{rk}} \\ \text{s. t. } & \sum_{j \in E} \lambda_j x_{ij} + s^- = x_{ik} \\ & \sum_{j \in E} \lambda_j y_{rj} - s^+ = y_{rk} \\ & \lambda, s^-, s^+ \geq 0 \end{aligned} \quad (4-13)$$

我们以表4-5的数据为例,来求解模型(4-13)。

表4-5 示例数据

DMU	$x_1$	$x_2$	$y$
A	10	40	10
B	15	25	10
C	32	24	16
D	48	16	16
E	24	48	16
F	54	27	18
G	50	60	20

第一阶段, 求解 SBM 模型 (4-1), 结果显示在表 4-6 中。有效 DMU 包括 A、B、C 和 D, 无效 DMU 为 E、F 和 G。

表 4-6 示例数据 SBM 模型 (4-1) 分析结果

DMU	效率值 ( $\rho$ )	参考标杆	目标值		
			$x_1$	$x_2$	$y$
A	1.000	A (1.000)	10.0	40.0	10.0
B	1.000	B (1.000)	15.0	25.0	10.0
C	1.000	C (1.000)	32.0	24.0	16.0
D	1.000	D (1.000)	48.0	16.0	16.0
E	0.917	B (1.600)	24.0	40.0	16.0
F	0.833	C (0.675); D (0.675)	54.0	27.0	21.6
G	0.650	C (1.563)	50.0	37.5	25.0

第二阶段, 针对无效 DMU 再求解模型 (4-13), 结果显示在表 4-7 中。

表 4-7 示例数据模型 (4-13) 分析结果

DMU	效率值 ( $\rho$ )	参考标杆	目标值		
			$x_1$	$x_2$	$y$
E	1.000	A (0.800); B (0.533); D (0.167)	24.0	48.0	16.0
F	0.944	A (0.300); D (0.937)	48.0	27.0	18.0
G	0.833	A (1.333); D (0.417)	33.3	60.0	20.0

从结果中可以发现这样的问题: E 为无效 DMU, 但采用模型 (4-13) 却得出 E 为有效 DMU 的错误结论。如果采用模型 (4-1) 对三个 DMU 的投影点进行检验, 可以发现均为无效。这说明模型 (4-13) 也无法解决求解前沿上最近投影点的问题。产生错误的原因, 可以用图 4-5 说明。模型 (4-13) 将参考集限定为 A、B、C 和 D 四个有效 DMU, 从图中可以看出, 即使是在约束 ( $\Sigma \lambda = 1$ ) 下, 通过四个有效 DMU 的线性组合可以构建出阴影区域内的任意一点。例如 E 点可以由 A、B 和 D 的线性组合构建 (在图中可理解为: 先由 A 和 B 构建出 A', 然后再由 A' 和 D 构建出 E), 因此在模型 (4-13) 中原本无效的 E 被错误的判断为有效。同理, 在模型 (4-13) 中 F 和 G 会从阴影区域内寻找距离最近的点作为投影点, 最近的投影点位于 AD 连线上, 从而错误地使投影点脱离前沿。

DEA 的前沿是由分段线性函数构成的, 每一段线性函数代表一个面 (在二维平面中代表一条线段)。模型 (4-13) 产生错误的原因在于参考集中包含了来自位于不同面的有效 DMU, 如果在模型中将参考集限定为同一面内的有效 DMU, 则可以避免这种错误。例如, 在图 4-5 中, 可以将前沿划分为 AB、BC 和 CD 三段, 然后采用模型 (4-13) 分别依次求解无效 DMU 至三段前沿的最近距离。

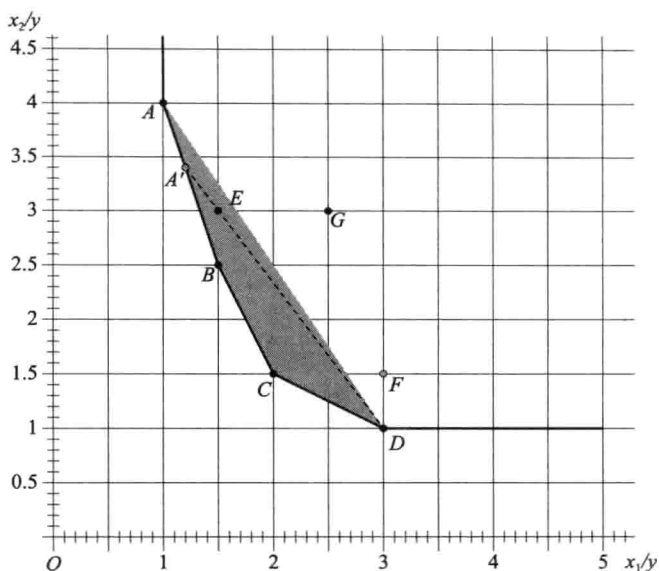


图 4-5 模型 (4-13) 错误示例

遵循这样的解决思路, 求解 MinDS 模型有两种方法。

**方法 1:** 找到前沿的所有支撑面 (以线性函数表示), 然后分别计算无效 DMU 至各个支撑面的最小距离, 最后确定其中最小的距离。找出所有支撑面的计算过程比较复杂, 方法参见 Amirteimoori 和 Kordrostami (2012)、Jahanshahloo 等人 (2007、2009)、Lotfi F. H. 等人 (2011) 的文献。SBM 模型的作者 Tone 就是按照这样的思路设计了 MinDS 模型的一种求解方法 (Tone K., 2010)。

Tone 以非导向模型为例介绍了 MinDS 模型的计算方法。

(1) 假设有  $n$  个 DMU, 其中经 SBM 模型 (4-1) 判定为有效的  $k$  个 DMU 的集合记为  $E = \{j \mid \rho_j = 1\}$  (这  $k$  个 DMU 是前沿所有支撑面的顶点)。

(2) 罗列出集合  $E$  的所有非空子集。用一个子集中的所有 DMU 通过线性组合构建出一个新的 DMU (线性组合系数  $\lambda > 0$ )。例如, 如果子集  $E_1 = \{A, B\}$ , 则新的 DMU 可以为  $0.5A + 0.5B$ 。将这个新的 DMU 放入原数据中, 并用 SBM 模型 (4-1) 检验是否为有效 DMU。如果这个新的 DMU 有效, 则称该子集为集合  $E$  的一个有效子集。有效子集内的 DMU 位于前沿的同一支撑面上。重复上述过程找出集合  $E$  的所有有效子集。

(3) 用集合  $E$  的一个有效子集  $E_s$  作为参考集, 求解模型 (4-14), 获得效率值  $\rho_s$ 。模型 (4-14) 与模型 (4-13) 的区别在于, 模型 (4-13) 的参考集是由所有有效 DMU 构成的集合  $E$ , 而在模型 (4-14) 的参考集为集合  $E$  的一个有效子集。

$$\begin{aligned} \max \rho &= \frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_i^- / x_{ik}}{1 + \frac{1}{q} \sum_{r=1}^q s_r^+ / y_{rk}} \\ \text{s. t. } &\sum_{j \in E_z} \lambda_j x_{ij} + s^- = x_{ik} \\ &\sum_{j \in E_z} \lambda_j y_{rj} - s^+ = y_{rk} \\ &\lambda, s^-, s^+ \geq 0 \end{aligned} \quad (4-14)$$

重复这一过程，遍历所有有效子集，MinDS 模型的效率值为

$$\rho^{\max} = \max \{ \rho_z \}, z = 1, 2, \dots$$

当有效 DMU 数量很多时，通过这种方法求解最小距离的计算过程会非常繁复。根据 Tone 的推理，在 CRS 模型中，不需测试元素数量大于  $m + q - 1$  的子集（ $m$  为投入指标数量， $q$  为产出指标数量）；在 VRS 模型中，不需测试元素数量大于  $m + q$  的子集。如果一个子集有效，则这个子集的所有子集肯定有效；如果一个子集无效，则须继续测试这个子集的所有子集。例如，如果  $\{A, B, C, D\}$  有效，则  $\{A, B, C\}$  肯定有效；如果  $\{A, B, C, D\}$  无效，则须继续测试  $\{B, C, D\}$ 、 $\{A, C, D\}$ 、 $\{A, B, D\}$  和  $\{A, B, C\}$  是否有效<sup>①</sup>。当有效 DMU 数量较多时，需要测试的子集数量会非常多。以 CRS 模型为例，当投入数量为 6，产出数量为 5 时，如果有效 DMU 数量为 20 个，则至少需要测试的子集数量为  $C(20, 10) = 184756$ <sup>②</sup>；如果有效 DMU 数量为 30 个，则至少需要测试的全部子集数量为  $C(30, 10) = 30045015$ 。由于大部分子集为无效子集，因此实际测试数量会大得多。因而这种方法仅适用于有效 DMU 数量较少的情况。

**方法 2：**通过在模型 (4-13) 中增加约束条件，使其参考标杆位于同一超平面内。在 Tone 提出第一种求解 MinDS 模型的方法之前，Aparicio 等人 (2007) 就设计了更为简便的方法。该方法不需要确定所有前沿的超平面，而是通过增加约束条件，将被评价 DMU 的参考标杆限制在同一超平面内。在通过 SBM 模型确定所有有效 DMU 之后，无论有效 DMU 数量是多少，Aparicio 提出的方法都只须一个规划模型，即可求解 MinDS 模型。

Aparicio 的方法与 Tone 的方法的相同之处都是先通过 SBM 模型（或者其他等价模型）获得有效 DMU 的集合  $E$ ；不同之处在于 Aparicio 等借助于混合整数线性规划的方法，避免了对  $E$  的所有子集的复杂测试过程，只需要在模型 (4-13) 的基础上，增加一组混合整数线性约束，从而使规划模型自动以有效子集作为其参考集，巧妙地避开了测试所有子集的过程。Aparicio 的方法求解 MinDS 模型的步骤可总结为：

- (1) 假设有  $n$  个 DMU，其中经 SBM 模型判定为有效的 DMU 的集合为  $E$ ；

① 在这些子集中，如果某个子集是有效子集的子集，则无须再测试。

② 计算排列组合数量可使用 Excel 的 COMBIN 函数， $C(20, 10) = \text{COMBIN}(20, 10)$ 。

(2) 求解以下混合整数线性规划, 获得 MinDS 效率值

$$\max \rho_k = \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (1 - s_i^- / x_{ik})}{\frac{1}{q} \sum_{r=1}^q (1 + s_r^+ / y_{rk})}$$

$$\text{s. t. } \sum_{j \in E} x_{ij} \lambda_j + s_i^- = x_{ik}, i = 1, 2, \dots, m \quad (\text{a-1})$$

$$\sum_{j \in E} y_{rj} \lambda_j - s_r^+ = y_{rk}, r = 1, 2, \dots, q \quad (\text{a-2})$$

$$s_i^- \geq 0, i = 1, 2, \dots, m \quad (\text{a-3})$$

$$s_r^+ \geq 0, r = 1, 2, \dots, q \quad (\text{a-4})$$

$$\lambda_j \geq 0, j \in E \quad (\text{a-5})$$

$$- \sum_{i=1}^m \nu_i x_{ij} + \sum_{r=1}^q \mu_r y_{rj} + d_j = 0, j \in E \quad (\text{b-1})$$

$$\nu_i \geq 1, i = 1, 2, \dots, m \quad (\text{b-2})$$

$$\mu_r \geq 1, r = 1, 2, \dots, q \quad (\text{b-3})$$

$$d_j \leq M b_j, j \in E \quad (\text{c-1})$$

$$\lambda_j \leq M(1 - b_j), j \in E \quad (\text{c-2})$$

$$b_j \in \{0, 1\}, j \in E \quad (\text{c-3})$$

$$d_j \geq 0, j \in E \quad (\text{c-4}) \quad (4-15)$$

其中  $M$  是一个足够大的正数。

MinDS 模型 (4-15) 由三部分构成: 第一部分是模型 (4-13), 即目标函数和约束 a; 第二部分是约束 b; 第三部分是约束 c。约束 b 和约束 c 的共同目的是使参考标杆位于同一个超平面内。虽然模型 (4-15) 并不求解投影点的超平面, 也就是说, 这个超平面是未知的, 但是却可以通过增加约束, 使参考标杆位于这个未知的超平面内。

通过对偶模型 (乘数模型) 可以求解出被评价 DMU 的投影点及其所有参考标杆所在的超平面。遵循这样的思路, 可以通过增加乘数模型的约束, 在使参考集为有效 DMU 的基础上, 进一步限制其参考标杆位于同一超平面内, 从而避免出现模型 (4-13) 中参考标杆不在同一超平面内的问题。

由于相加模型比 SBM 模型简单, 不需要进行线性转换, 所以采用相加模型的乘数形式 (约束 a)。

虽然模型 (4-13) 的最优解会脱离前沿, 但是在模型 (4-13) 所有可行解中, 必然有一个解所对应的投影点是强有效前沿上距离被评价 DMU 最近的点。我们将这个解记为  $S_{\text{MinDSF}}^k$ , 其参考标杆的集合为  $R_{\text{MinDSF}}^k$ 。由于 (松弛变量) 相加模型 (Additive Model) 或加权相加模型 (Weighted Additive Model) 与 SBM 模型在确定有效 DMU 集合上是等价的, 因此  $S_{\text{MinDSF}}^k$  所对应的投影点必然也是相加模型前沿上的一个点, 即  $S_{\text{MinDSF}}^k$  也是相加模型的一个可行解。

相加模型可表示为

$$\begin{aligned}
 \min & - \sum_{i=1}^m s_i^- - \sum_{r=1}^q s_r^+ \\
 \text{s. t.} & - \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j - s_i^- = -x_{ik} \\
 & \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - s_r^+ = y_{rk} \\
 & \lambda, s^-, s^+ \geq 0 \\
 & i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned} \tag{4-16}$$

其对偶模型（乘数形式）为

$$\begin{aligned}
 \min & - \sum_{i=1}^m \nu_i x_{ik} + \sum_{r=1}^q \mu_r y_{rk} \\
 \text{s. t.} & - \sum_{i=1}^m \nu_i x_{ij} + \sum_{r=1}^q \mu_r y_{rj} \leq 0 \\
 & \nu_i \geq 1 \\
 & \mu_r \geq 1 \\
 & i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned} \tag{4-17}$$

模型（4-13）中最小距离的可行解  $S_{\text{MinDSF}}^k$  也是相加模型（4-16）的一个可行解。假设该可行解在对偶模型（4-17）中对应的对偶解为  $\mu^*$  和  $\nu^*$ ，则该可行解的所有参考标杆（ $R_{\text{MinDSF}}^k$ ）所在的超平面可表示为<sup>❶</sup>

$$- \sum_{i=1}^m \nu_i^* x_i + \sum_{r=1}^q \mu_r^* y_r = 0$$

下面表 4-8 用一些简单的数据来直观地演示这一规律。

表 4-8 超平面示例数据

DMU	$x_1$	$x_2$	$y$
A	1.2	4.0	1.0
B	1.5	2.5	1.0
C	2.0	1.5	1.0
D	3.0	1.0	1.0
E	2.0	3.5	1.0
F	3.0	1.5	1.0
G	2.5	3.0	1.0

在图 4-6 中，G 点在前沿上的最小距离投影点为  $G'$ ，其参考标杆为 A 和 B，通过 A 和 B 的超平面为  $-5x_1 - x_2 + 10y = 0$ （图中虚线表示的是  $y = 1$  时超平面为直

❶ 通过投影点的超平面可能有多个。

线  $d$ )。除  $A$  和  $B$  之外, 其他 DMU 位于超平面的右侧, 即  $-5x_1 - x_2 + 10y < 0$ ①。

通过以上分析可以得出, 在模型 (4-13) 中, 如果  $DMU_j$  位于该超平面内, 则应符合

$$-\sum_{i=1}^m \nu_i x_i + \sum_{r=1}^q \mu_r y_r = 0, j \in E$$

模型 (4-15) 增加的两组约束就是为了满足这一规则:

(1) 如果  $b_j = 0$ , 则  $d_j = 0$ , 约束 (b-1) 等

同于  $-\sum_{i=1}^m \nu_i x_i + \sum_{r=1}^q \mu_r y_r = 0, j \in E$ ; 约束 (c-2)

等同于  $\lambda_j \leq M$ , 只要  $M$  足够大就相当于对  $\lambda_j$  没有限制其取值上限。此时  $DMU_j$  是  $DMU_k$  的参考标杆。

(2) 如果  $b_j = 1$ , 则  $d_j \leq M$ , 只要  $M$  足够大就相当于对  $d_j$  取值上限没有限制, 约束 (b-1) 等同于  $-\sum_{i=1}^m \nu_i x_i + \sum_{r=1}^q \mu_r y_r \leq 0, j \in E$ ; 约束 (c-2) 等同于  $\lambda_j = 0$ 。此时  $DMU_j$  不是  $DMU_k$  的参考标杆。

采用模型 (4-15) 计算表 4-8 中  $E$  的 MinDS 模型的线性规划式如下 ( $M = 1000000$ ), 求解结果见表 4-9。

```

/* DMU_E */
/* Objective function */
max: + t - 0.25 SLACK_x1 - 0.142857142857 SLACK_x2;
/* Constraints */
Constraint_t: + t + SLACK_y = 1;
Constraint_x1: - 2 t + 1.2 LAMBDA_A + 1.5 LAMBDA_B + 2 LAMBDA_C +
3 LAMBDA_D + SLACK_x1 = 0;
Constraint_x2: - 3.5 t + 4 LAMBDA_A + 2.5 LAMBDA_B + 1.5 LAMBDA_C +
LAMBDA_D + SLACK_x2 = 0;
Constraint_y: - t + LAMBDA_A + LAMBDA_B + LAMBDA_C + LAMBDA_D -
SLACK_y = 0;
Constraint_v_1: + 2 v_1 > = 1;
Constraint_v_2: + 3.5 v_2 > = 1;
Constraint_u_1: + u_1 > = 1;

```

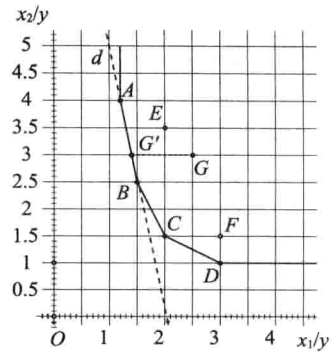


图 4-6 超平面示意图

① 除了  $A$  和  $B$  之外, 如果还有其他 DMU 位于这个超平面内, 例如, 如果在  $A$  和  $B$  之间的连线上还有  $H$ , 则模型将存在多个最优解。投影点  $G'$  可能由  $\{A, B\}$ 、 $\{A, H\}$ 、 $\{B, H\}$  或  $\{A, B, H\}$  的线性组合构建。 $H$  点也符合  $-5x_1 - x_2 + 10y = 0$ , 因此在模型 (4-15) 中对非参考标杆的约束是  $-\sum_{i=1}^m \nu_i x_{ij} +$

$\sum_{r=1}^q \mu_r y_{rj} \leq 0$ , 而不是  $-\sum_{i=1}^m \nu_i x_{ij} + \sum_{r=1}^q \mu_r y_{rj} < 0$ 。

```

Constraint_ v_ u_ A: - 1.2 v_ 1 - 4 v_ 2 + u_ 1 + d_ 1 = 0;
Constraint_ v_ u_ B: - 1.5 v_ 1 - 2.5 v_ 2 + u_ 1 + d_ 2 = 0;
Constraint_ v_ u_ C: - 2 v_ 1 - 1.5 v_ 2 + u_ 1 + d_ 3 = 0;
Constraint_ v_ u_ D: - 3 v_ 1 - v_ 2 + u_ 1 + d_ 4 = 0;
Constraint_ d_ b_ A: + d_ 1 - 1000000 b_ 1 < = 0;
Constraint_ d_ b_ B: + d_ 2 - 1000000 b_ 2 < = 0;
Constraint_ d_ b_ C: + d_ 3 - 1000000 b_ 3 < = 0;
Constraint_ d_ b_ D: + d_ 4 - 1000000 b_ 4 < = 0;
Constraint_ lambda_ b_ A: + LAMBDA_ A + 1000000 b_ 1 < = 1000000;
Constraint_ lambda_ b_ B: + LAMBDA_ B + 1000000 b_ 2 < = 1000000;
Constraint_ lambda_ b_ C: + LAMBDA_ C + 1000000 b_ 3 < = 1000000;
Constraint_ lambda_ b_ D: + LAMBDA_ D + 1000000 b_ 4 < = 1000000;
/* Variable bounds */
v_ 1 > = - Inf;
v_ 2 > = - Inf;
u_ 1 > = - Inf;
b_ 1 < = 1;
b_ 2 < = 1;
b_ 3 < = 1;
b_ 4 < = 1;
/* Integer definitions */
int b_ 1, b_ 2, b_ 3, b_ 4;

```

表 4-9 E 点 MinDS 模型的计算结果

变 量	结 果
Objective (效率值)	0.825
t	1
SLACK_ x1	0.7
SLACK_ x2	0
SLACK_ y	0
LAMBDA_ A	0.6667
LAMBDA_ B	0.3333
LAMBDA_ C	0
LAMBDA_ D	0
v_ 1	833333.3333
v_ 2	166666.6667
u_ 1	1666666.6667
d_ 1	0
d_ 2	0



续表

变 量	结 果
d_3	250000
d_4	1000000
b_1	0
b_2	0
b_3	1
b_4	1

在 CRS MinDS 模型 (4-15) 的基础上增加约束  $\sum_{j \in E} \lambda_j = 1$  和自由变量  $\mu_0$ , 即为 VRS MinDS 模型

$$\begin{aligned}
 \max \rho_k &= \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (1 - s_i^- / x_{ik})}{\frac{1}{q} \sum_{r=1}^q (1 + s_r^+ / y_{rk})} \\
 \text{s. t. } &\sum_{j \in E} x_{ij} \lambda_j + s_i^- = x_{ik} \\
 &\sum_{j \in E} y_{rj} \lambda_j - s_r^+ = y_{rk} \\
 &\sum_{j \in E} \lambda_j = 1 \\
 &s_i^- \geq 0, i = 1, 2, \dots, m \\
 &s_r^+ \geq 0, r = 1, 2, \dots, q \\
 &\lambda_j \geq 0, j \in E \\
 &-\sum_{i=1}^m \nu_i x_{ij} + \sum_{r=1}^q \mu_r y_{rj} + \mu_0 + d_j = 0, j \in E \\
 &\nu_i \geq 1, i = 1, 2, \dots, m \\
 &\mu_r \geq 1, r = 1, 2, \dots, q \\
 &d_j \leq Mb_j, j \in E \\
 &\lambda_j \leq M(1 - b_j), j \in E \\
 &b_j \in \{0, 1\}, j \in E \\
 &d_j \geq 0, j \in E \\
 &\mu_0 \text{ free}
 \end{aligned} \tag{4-18}$$

需要注意的是受到线性规划求解精度的影响,  $M$  需要是一个合适的足够大的正数, 否则求解的结果可能并非正确的最优值。  $M$  过大或过小都可能获得错误的数值。规划软件不同或者数据不同, 合适的  $M$  值范围存在差异。

虽然 Tone 和 Aparicio 的方法都能求解最小距离函数, 两者的本质思想是一致的, 但显然 Aparicio 的方法更简单实用。在 MaxDEA 软件中采用的是 Aparicio 的方法。

#### 4.2.2 MaxDEA 求解非导向 MinDS 模型示例

本节利用实际数据来说明 MaxDEA 软件求解 MinDS 模型的过程与结果。表 4-10 是 2004 年各省（市、自治区）医院的部分投入和产出指标。以床位数和卫生技术人员数作为投入指标，以诊疗人次数和入院人数作为产出指标，建立 DEA 模型。

表 4-10 各地区医院部分投入产出指标（2004 年）

地 区	床位数 (个)	卫技人员数 (人)	诊疗人次数 (人次)	入院人数 (人)
安 徽	77773	84672	36106166	1632009
北 京	69850	90656	56191348	987106
福 建	54975	51611	37915799	1290919
甘 肃	45123	42130	19116626	708323
广 东	144416	157375	169171460	3545978
广 西	64466	66521	41722576	1418468
贵 州	43835	39839	17156975	820696
海 南	13251	16277	7449266	249455
河 北	114373	128076	48433864	2399541
河 南	145870	160899	70404035	2935932
黑龙江	98975	100341	31470419	1568560
湖 北	95186	107546	50361992	2036096
湖 南	100167	106542	36818263	1957330
吉 林	69039	78462	26756299	1082780
江 苏	122787	129843	84927158	2872465
江 西	58750	61535	31554864	1266984
辽 宁	139635	136979	47253345	2068764
内蒙古	48074	53483	18296934	792838
宁 夏	14087	14243	7323406	260350
青 海	13004	12382	4781871	254352
山 东	163876	181441	79416181	3785327
山 西	79721	88699	28674172	1176485
陕 西	77798	76225	29845077	1331931
上 海	65114	70265	58799940	1141108
四 川	123995	112744	65595496	2578469
天 津	36645	45229	24549117	521743
西 藏	4238	4918	2091942	52818
新 疆	61192	60869	27318653	1316919
云 南	71170	63095	34037932	1421345
浙 江	102295	107777	87342404	2434372
重 庆	43784	38191	23643216	823952

(1) 至强有效前沿最小距离 CRS 模型。

软件操作：导入数据，设置投入产出指标，然后选择包络模型（菜单“Run Envelopment Model”）：<sup>①</sup>

- 1) Distance 选择“Minimum Distance to Strong Efficient Frontier”（见图 4-7）。
- 2) Orientation 选择“Non-oriented”（见图 4-8）。

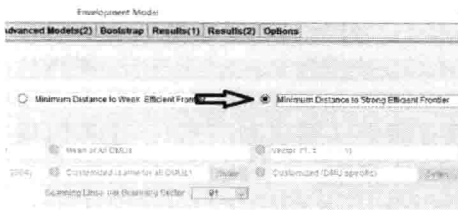


图 4-7 设置 Distance

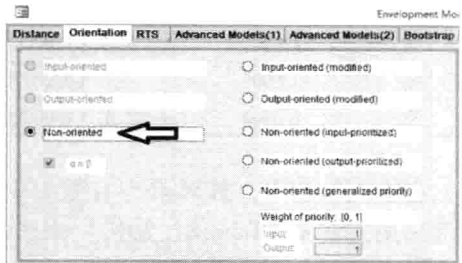


图 4-8 设置 Orientation

3) RTS 选择“Constant (CRS)”（见图 4-9）。

4)  $M$  值有三种设置方式：一是 Automatically find a proper Big M for each DMU，软件自动为求解每个 DMU 确定一个合适的  $M$  值；二是 Automatically find a proper Big M for the 1st DMU and apply it to all DMUs，软件在求解第一个 DMU 时自动确定一个合适的  $M$  值，并在求解其他所有 DMU 时均采用这个  $M$  值；三是 Customized，由用户指定  $M$  值，除了从下拉列表中选择，用户还可以填入任意大小的数值。合适的  $M$  值与每个 DMU 的具体投入产出数值大小相关， $M$  值设置不当会对结果产生较大误差。建议采用第一种设置方式，由软件自动为每个 DMU 分别确定一个合适的  $M$  值（见图 4-10）。

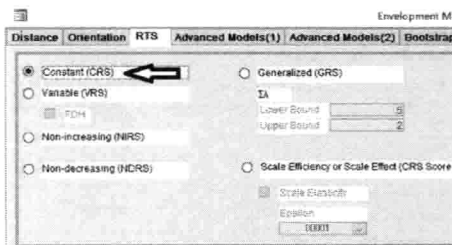


图 4-9 设置 RTS

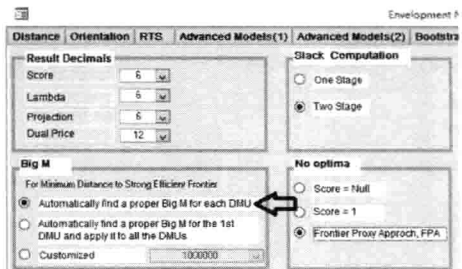


图 4-10 设置  $M$  值

表 4-11 是 MaxDEA 的部分输出结果。29 个无效 DMU 的 MinDS 模型效率值比 SBM 模型效率值平均高出 0.15。

<sup>①</sup> 软件求解 MinDS 模型所需时间可能远远超过求解 SBM 模型所需的时间。MaxDEA 软件在运行过程中会失去响应，特别是当数据量较大时，需耐心等待。当所消耗的时间超出合理范围时，例如 50 个 DMU，4 个指标，运行一天仍然没有结果，说明模型超出规划软件求解能力，可考虑更改模型选项（如更改模型导向）后再尝试。

表 4-11 MinDS 模型与 SBM 模型分析结果比较 (非导向 CRS)

地区	SBM		MinDS	
	效率值	参考标杆	效率值	参考标杆
安徽	0.5418	广东 (0.538027)	0.7150	福建 (1.414698)
北京	0.5760	广东 (0.483672)	0.6534	福建 (0.967877); 广东 (0.115229)
福建	1.0000	福建 (1.000000)	1.0000	福建 (1.000000)
甘肃	0.5006	广东 (0.267705)	0.6420	福建 (0.816299)
广东	1.0000	广东 (1.000000)	1.0000	广东 (1.000000)

在本例数据中, 被评价为有效 DMU 只有两个 (福建和广东), 也可以很容易地采用方法 1 (Tone K, 2010) 来求解 MinDS 模型。

第一步, 求解 SBM 模型, 确定福建和广东为有效 DMU。

第二步, 验证由福建和广东的线性组合构建的新 DMU 为有效 DMU。验证方法是将组合的 DMU 加入原数据中, 通过 SBM 模型检验其是否为有效 DMU。

第三步, 求解模型 (4-14)。在 MaxDEA 软件中无法直接运行模型 (4-14), 但可以通过修改 MaxDEA 软件输出的线性规划式, 然后通过规划软件 (如 lpsolve) 修改规划式之后在规划软件内运行模型。具体方法为:

- 1) 在 MaxDEA 软件中按照 SBM 模型进行设置;
- 2) 在 “Advanced Model (1)” 中, 勾选 “Customized Variable Benchmarks”, 点击 “Define”, 打开 DMU 选择窗口 (见图 4-11)。

在 “Variable Benchmark” 一列中, 不勾选除福建和广东之外的其他 DMU (可通过点击 “Variable Benchmark” 左边的复选框来全选或取消全选所有 DMU)<sup>①</sup> (见图 4-12)。

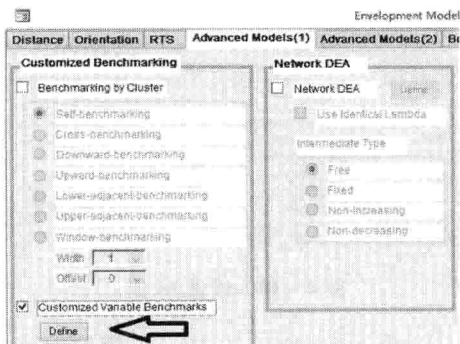


图 4-11 选择 DMU

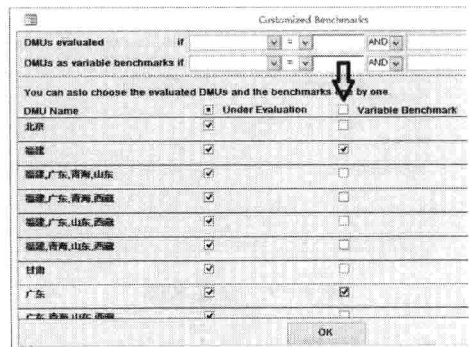


图 4-12 设置 Variable Benchmark R

① 为便于阅读, MaxDEA 在输出的规划式中, 许多变量名称包含投入产出指标名称或 DMU 名称。规划软件 (如 Lingo 和 lpsolve) 一般不支持中文, 因此需要将投入产出指标和 DMU 的名称改为英文字母加数字的格式。例如, 在本例中可将投入产出的名称改为 Input1、Input2、Output1 和 Output2, 将各省名称改为 DMU01, DMU02, …。此处为便于说明, 还未修改 DMU 名称。

3) 在“Options”中的“Export LP”，选择“All DMUs”，然后运行模型（见图4-13）。

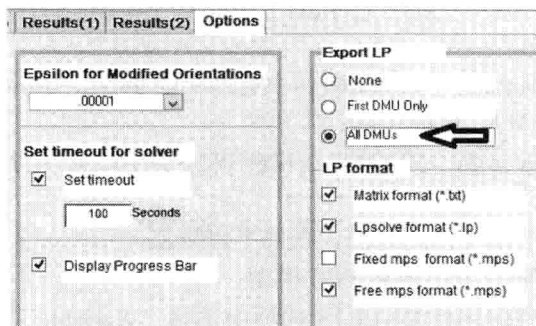


图4-13 设置输出范围

4) 输出的线性规格式保存在 MaxDEA 软件的同一文件夹中，文件名为“LP\_” + DMU 名称。

5) 使用规划软件（如 lpsolve 5.5）打开线性规划文件<sup>①</sup>。然后在规划软件内将规格式的目标函数由 minimize (min) 改为 maximize (max)，然后求解。以安徽（名称修改为 DMU01）为例，修改后的线性规格式为（只需将 min 修改为 max，见图4-14）。<sup>②</sup>

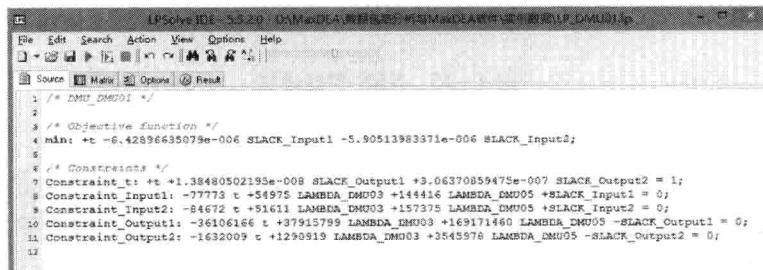


图4-14 修改规划文件

/\* Objective function \*/

max: +t -6.42896635079e -006 SLACK\_ Input1 -5.90513983371e -006 SLACK\_ In-  
put2;

/\* Constraints \*/

Constraint\_ t: + t + 1.38480502195e -008 SLACK\_ Output1 + 3.06370859475e -007  
SLACK\_ Output2 = 1;

<sup>①</sup> 导出的规格式有三种格式：\*.txt 为矩阵格式，便于导入 Excel 分析；\*.lp 是 lpsolve 软件专用格式；\*.mps 是通用格式，但需注意 lpsolve 仅支持“Fixed mps”格式，不支持“Free mps”格式。lpsolve 是一款免费开源线性规划求解软件，<http://sourceforge.net/projects/lpsolve/>。

<sup>②</sup> 此方法仅用于验证两种方法结果的一致性。由于需要修改每一个 DMU 的规格式，并不适用于 DMU 数量很多的情况。

Constraint\_ Input1:  $-77773 t + 54975 \text{ LAMBDA\_ DMU03} + 144416 \text{ LAMBDA\_ DMU05} + \text{SLACK\_ Input1} = 0;$

Constraint\_ Input2:  $-84672 t + 51611 \text{ LAMBDA\_ DMU03} + 157375 \text{ LAMBDA\_ DMU05} + \text{SLACK\_ Input2} = 0;$

Constraint\_ Output1:  $-36106166 t + 37915799 \text{ LAMBDA\_ DMU03} + 169171460 \text{ LAMBDA\_ DMU05} - \text{SLACK\_ Output1} = 0;$

Constraint\_ Output2:  $-1632009 t + 1290919 \text{ LAMBDA\_ DMU03} + 3545978 \text{ LAMBDA\_ DMU05} - \text{SLACK\_ Output2} = 0;$

两种方法求解的结果完全相同，在此不再重复。

(2) 至强有效前沿最小距离 VRS 模型。

在 MaxDEA 软件包络模型的 RTS 选项中选择“Variable (VRS)”，其他设置与 CRS 模型完全相同（见图 4-15）。

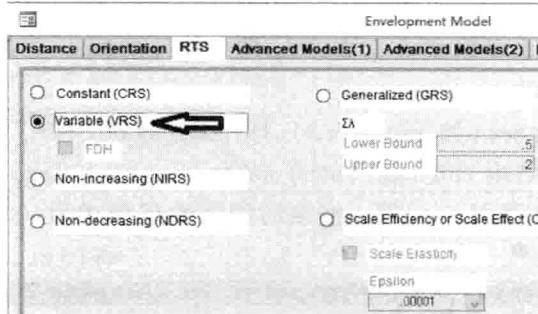


图 4-15 VRS 模型设置

表 4-12 是 MinDS 的 CRS 与 VRS 模型分析结果比较。前文提到，在径向和 SBM 模型中，CRS 模型的效率值小于或等于 VRS 模型的效率值。但是在 MinDS 模型中不存在这样的关系。表 4-12 中共有 15 个 DMU 的 CRS 模型效率值大于 VRS 模型效率值，这 15 个 DMU 的规模效应（CRS 模型效率值与 VRS 模型效率值的比值）大于 1。这个问题将在下一节专门分析。

表 4-12 MinDS 的 CRS 与 VRS 模型分析结果比较（非导向）

地 区	VRS		CRS	
	效率值	参考标杆	效率值	参考标杆
安 徽	0.6459	福建 (0.848745); 广东 (0.151255)	0.7150	福建 (1.414698)
北 京	0.6463	福建 (0.860764); 广东 (0.139236)	0.6534	福建 (0.967877); 广东 (0.115229)
福 建	1.0000	福建 (1.000000)	1.0000	福建 (1.000000)
甘 肃	0.6954	福建 (0.437956); 青海 (0.562044)	0.6420	福建 (0.816299)

续表

地区	VRS		CRS	
	效率值	参考标杆	效率值	参考标杆
广东	1.0000	广东 (1.000000)	1.0000	广东 (1.000000)
广西	0.8612	福建 (0.943439); 广东 (0.056561)	0.8954	福建 (1.172642)
贵州	0.7149	福建 (0.546365); 青海 (0.453635)	0.6740	福建 (0.771909)
海南	0.8663	福建 (0.127950); 青海 (0.287609); 西藏 (0.584440)	0.7131	福建 (0.241037)
河北	0.5374	福建 (0.508384); 广东 (0.491616)	0.6690	福建 (2.080455)
河南	0.5649	广东 (0.925283); 山东 (0.074717)	0.7132	福建 (2.653388)
青海	1.0000	青海 (1.000000)	0.6456	福建 (0.236544)
山东	1.0000	山东 (1.000000)	0.7574	福建 (2.980919)
西藏	1.0000	西藏 (1.000000)	0.5513	福建 (0.077090)

在本例数据的 VRS 模型中, 被评价为有效的 DMU 有 5 个, 也可以采用方法 1 (Tone K, 2010) 来求解。

第一步, 求解 SBM 模型, 确定 5 个有效 DMU {福建, 广东, 青海, 山东, 西藏}。

第二步, 确定 5 个有效 DMU 的有效子集。

1) 验证有效 DMU 集合的所有包含 4 个 DMU 的子集的有效性, 共有 5 个子集, 其线性组合 (采用 4 个 DMU 的系数均为 0.25) 构成的 DMU 见表 4-13。注意在 VRS 模型中验证子集的有效性, 其线性组合要符合  $\sum \lambda = 1$ 。经校验, 全部子集均为无效, 结果见表 4-14。

表 4-13 包含 4 个有效 DMU 的线性组合

组合	床位数	卫技人员数	诊疗人次数	入院人数
福建, 广东, 青海, 山东	94067.75	100702.25	72821327.75	2219144.00
福建, 广东, 青海, 西藏	54158.25	56571.50	53490268.00	1286016.75
福建, 广东, 山东, 西藏	91876.25	98836.25	72148845.50	2168760.50
福建, 青海, 山东, 西藏	59023.25	62588.00	31051448.25	1345854.00
广东, 青海, 山东, 西藏	81383.50	89029.00	63865363.50	1909618.75

表 4-14 包含 4 个有效 DMU 的线性组合 SBM 模型测试结果

组 合	效率值	参考标杆
福建, 广东, 青海, 山东	0.7979	广东 (0.628271); 西藏 (0.371729)
福建, 广东, 青海, 西藏	0.9926	福建 (0.295342); 广东 (0.248352); 西藏 (0.456305)
福建, 广东, 山东, 西藏	0.8034	广东 (0.616031); 西藏 (0.383969)
福建, 青海, 山东, 西藏	0.6307	广东 (0.378271); 西藏 (0.621729)
广东, 青海, 山东, 西藏	0.7969	广东 (0.550340); 西藏 (0.449660)

2) 继续验证所有包含 3 个有效 DMU 的子集的有效性, 共有 10 个子集 (见表 4-15)。经校验, {福建, 广东, 西藏} 和 {福建, 青海, 西藏} 有两个子集有效。分析结果见表 4-16。

表 4-15 包含 3 个有效 DMU 的线性组合

组 合	床位数	卫技人员数	诊疗人次	入院人数
福建, 广东, 青海	70798.33	73789.33	70623043.33	1697083.00
福建, 广东, 山东	121089.00	130142.33	95501146.67	2874074.67
福建, 广东, 西藏	67876.33	71301.33	69726400.33	1629905.00
福建, 青海, 山东	77285.00	81811.33	40704617.00	1776866.00
福建, 青海, 西藏	24072.33	22970.33	14929870.67	532696.33
福建, 山东, 西藏	74363.00	79323.33	39807974.00	1709688.00
广东, 青海, 山东	107098.67	117066.00	84456504.00	2528552.33
广东, 青海, 西藏	53886.00	58225.00	58681757.67	1284382.67
广东, 山东, 西藏	104176.67	114578.00	83559861.00	2461374.33
青海, 山东, 西藏	60372.67	66247.00	28763331.33	1364165.67

表 4-16 包含 3 个有效 DMU 的线性组合 SBM 模型测试结果

组 合	效率值	参考标杆
福建, 广东, 青海	0.9925	福建 (0.393790); 广东 (0.331137); 西藏 (0.275073)
福建, 广东, 山东	0.8022	广东 (0.821375); 西藏 (0.178625)
福建, 广东, 西藏	1.0000	福建 (0.333333); 广东 (0.333333); 西藏 (0.333333)
福建, 青海, 山东	0.6267	广东 (0.504361); 西藏 (0.495639)
福建, 青海, 西藏	1.0000	福建 (0.333333); 青海 (0.333333); 西藏 (0.333333)
福建, 山东, 西藏	0.6318	广东 (0.488041); 西藏 (0.511959)
广东, 青海, 山东	0.7955	广东 (0.733786); 西藏 (0.266214)
广东, 青海, 西藏	0.9909	福建 (0.060457); 广东 (0.331137); 西藏 (0.608407)
广东, 山东, 西藏	0.8018	广东 (0.712941); 西藏 (0.287059)
青海, 山东, 西藏	0.5763	广东 (0.400453); 西藏 (0.599547)



3) 继续验证所有包含2个有效DMU的子集的有效性, 共有10个子集, 其中有5个是已验证的有效子集的子集(数据空白的组合), 无须再进行验证(见表4-17)。经校验, 5个组合中只有1个有效, 分析结果见表4-18。

表4-17 包含2个有效DMU的线性组合

组 合	床位数	卫技人员数	诊疗人次数	入院人数
福建, 广东				
福建, 青海				
福建, 山东	109425.50	116526.00	58665990.00	2538123.00
福建, 西藏				
广东, 青海	78710.00	84878.50	86976665.50	1900165.00
广东, 山东	154146.00	169408.00	124293820.50	3665652.50
广东, 西藏				
青海, 山东	88440.00	96911.50	42099026.00	2019839.50
青海, 西藏				
山东, 西藏	84057.00	93179.50	40754061.50	1919072.50

表4-18 包含2个有效DMU的线性组合SBM模型测试结果

组 合	效率值	参考标杆
福建, 山东	0.6277	广东(0.732062); 西藏(0.267938)
广东, 青海	0.9907	福建(0.090685); 广东(0.496705); 西藏(0.412610)
广东, 山东	1.0000	广东(0.500000); 山东(0.500000)
青海, 山东	0.5704	广东(0.600679); 西藏(0.399321)
山东, 西藏	0.5752	广东(0.569412); 西藏(0.430588)

4) 所有5个有效DMU都已包含在上述3个检验有效的子集中, 因此无须再对包含单个DMU的子集进行检验。模型(4-13)需要依次参考的子集共有3个, 即{福建, 广东, 西藏}、{福建, 青海, 西藏}和{广东, 山东}。

第三步, 分别参考3个子集, 求解模型(4-14), 其中最大的效率值即为MinDS模型效率值。结果见表4-19, 表中空白的格子表示该模型无最优解(目标函数无边界)。通过比较表4-19和表4-12的结果可以看出, 两种方法获得的结论完全相同。

表 4-19 模型 (4-14) 不同参考集结果汇总

地区	{福建, 广东, 西藏}		{福建, 青海, 西藏}		{广东, 山东}		最大效率值
	效率值	参考标杆	效率值	参考标杆	效率值	参考标杆	
安徽	0.6459	福建 (0.848745); 广东 (0.151255)					0.6459
北京	0.6463	福建 (0.860764); 广东 (0.139236)					0.6463
甘肃	0.6627	福建 (0.529444); 西藏 (0.470556)	0.6954	福建 (0.437956); 青海 (0.562044)			0.6954
广西	0.8612	福建 (0.943439); 广东 (0.056561)					0.8612
贵州	0.6888	福建 (0.620206); 西藏 (0.379794)	0.7149	福建 (0.546365); 青海 (0.453635)			0.7149
海南	0.8245	福建 (0.158821); 西藏 (0.841179)	0.8663	福建 (0.127950); 青海 (0.287609); 西藏 (0.584440)			0.8663
河北	0.5374	福建 (0.508384); 广东 (0.491616)					0.5374
河南	0.5604	福建 (0.270523); 广东 (0.729477)			0.5649	广东 (0.925283); 山东 (0.074717)	0.5649

#### \* 4.2.3 MinDS 模型的特殊性

(1) MinDS 模型 CRS 效率值可能会大于 VRS 效率值。

径向模型和 SBM 模型, 以及后面介绍的方向距离函数模型和 MinDW 模型求解的效率值, 均存在以下关系:

$$\text{VRS 效率值} \geq \text{CRS 效率值}$$

在 MinDS 模型中是否还存在上述关系呢? 现有文献对此没有进行讨论。

表 4-20 列出了 MinDS 模型 CRS 和 VRS 效率值及规模效应。在 31 个 DMU 中, 有 15 个 DMU 的 CRS 效率值大于 VRS 效率值, 以此计算的规模效应大于 1 (表中黑体部分)。

表 4-20 MinDS 模型的规模效应

地区	CRS 效率值	VRS 效率值	规模效率
安徽	<b>0.7150</b>	<b>0.6459</b>	<b>1.1070</b>
北京	<b>0.6534</b>	<b>0.6463</b>	<b>1.0111</b>
福建	1.0000	1.0000	1.0000
甘肃	0.6420	0.6954	0.9232
广东	1.0000	1.0000	1.0000
广西	<b>0.8954</b>	<b>0.8612</b>	<b>1.0398</b>

这一实例说明在 MinDS 模型中, CRS 效率值会出现大于 VRS 效率值的情况。MinDS 模型的目标函数是最大化效率值 (最小化距离)。(1)假设 MinDS VRS 模型与 MinDS CRS 模型相比, 仅仅是增加约束  $\sum \lambda = 1$ , 则 VRS 效率值会小于 CRS 效率值。如果这样 VRS 模型的最优解会是 CRS 模型的一个可行解。(2)假设在 MinDS VRS 模型中删除约束  $\sum \lambda = 1$ , 在 VRS - SBM 模型中, 被评价为有效 DMU 的数量一般会多于 CRS - SBM 模型中有效 DMU 的数量, 因此, 在 MinDS VRS 模型参考集中的 DMU 数量会超过 MinDS CRS 模型 (VRS 模型参考集包含了 CRS 模型参考集) 参考集中的 DMU 的数量, 因此 MinDS VRS 模型的效率值会大于 MinDS CRS 模型的效率值。综上所述, MinDS VRS 模型和 MinDS CRS 模型之间的差异, 既有使 CRS 模型效率值更大的成分, 也有使 VRS 效率值更大的成分, 因此两种结果都会出现。

(2) 扩展参考集后 MinDS 模型效率值有可能增大。

假设有两个 DMU 集合, 分别为  $S_1$  和  $S_2$ , 例如

$$S_1 = \{A, B, C, K\}, S_2 = \{D, E, F, K\}$$

$$S_3 = S_1 \cup S_2 = \{A, B, C, D, E, F, K\}$$

$E_{k1}, E_{k2}, E_{k3}$  表示 DMU<sub>k</sub> 分别以  $S_1, S_2, S_3$  作为参考集建立 DEA 模型计算得出的效率值 (见表 4-21)。

表 4-21 示例数据

DMU	$x_1$	$x_2$	$y$
A	1.2	4	1
B	1.5	2.5	1
C	2	3.5	1
D	2	1.5	1
E	3	1	1
F	3	1.5	1
K	2.5	3	1

径向模型、SBM 模型及后面介绍的方向距离函数模型和 MinDW 模型得出的效率值均存在以下关系

$$E_{k3} \leq E_{k1}, E_{k3} \leq E_{k2}$$

唯独 MinDS 模型不存在上述关系, 当参考集扩大后, MinDS 模型得出的效率值有可能不变、减小或增大。

当扩大参考集之后, 前沿的变化存在多种可能, 例如:

- 1) 前沿没有发生变化, 此时各种距离函数计算得出的效率值均没有变化;
- 2) 前沿整体往前移动, 即前沿的所有部分均往前移动, 此时各种距离函数得出的效率值均减小;

3) 前沿没有移动, 但变得更加完整。如图 4-16 所示, 当参考集由  $S_1$  扩展到  $S_3$  或由  $S_2$  扩展到  $S_3$  时, 前沿并没有发生移动, 而是变得更加完整 (由  $AB$  或  $DE$  扩展到  $ABDE$ )。在这种情况下, MinDS 模型得出的效率值有可能不变, 也有可能增大, 而其他距离函数模型得出的效率值不变或减小。在 MinDS 模型中, 当参考集由  $S_1$  扩展到  $S_3$  时,  $K$  的投影点和效率值没有发生变化, 投影点均为  $K_1$ , 效率值均为 0.7800; 当参考集由  $S_2$  扩展到  $S_3$  时,  $K$  的投影点由  $K_2$  变为  $K_1$ , 效率值由 0.7083 增大到 0.7800。

MinDS 模型在扩展参考集后出现效率值增大, 即至强有效前沿的最小距离减小, 原因在于在扩展参考集前, 在被评价 DMU 的投影区域内 (见图 4-17 中  $K$  的投影区域为  $KK_1DK_2$  多边形区域), 强有效前沿存在缺口 ( $K_1D$  段为弱有效)。当扩展参考集后, 缺口被部分或完全补上, 被评价 DMU 至这段补上的前沿的最小距离小于于原前沿的最小距离, 从而使扩展参考集后被评价 DMU 至新前沿的距离减小。

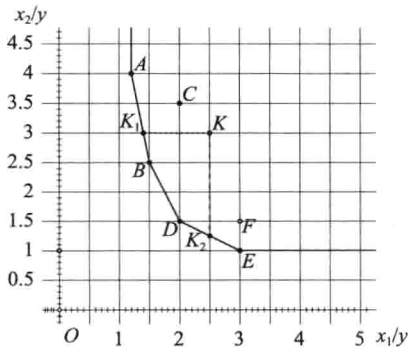


图 4-16 扩大参考集后效率值增大示意图

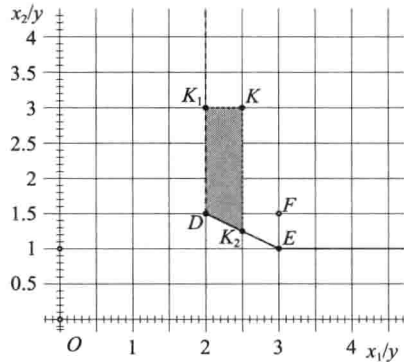


图 4-17 扩大参考集后效率值增大原因示意图

MinDS 模型的上述两个特性, 即 CRS 效率值可能会大于 VRS 效率值、参考集扩大后效率值有可能增大, 对于其在实践应用中的影响需要进一步深入研究。例如, 序列 Malmquist 模型的一个功能是能够使得出的技术变化指数总是大于 1, 也就是说, 利用序列 Malmquist 模型得出的总是技术进步, 不会出现技术退步的情况, 从而使这一模型适合于评价那些从理论上不存在技术退步的情形 (Shestakova, 2003)。

但 MinDS 模型在参考集扩大后效率值有可能增大的特性, 使得如果在序列 Malmquist 模型中采用 MinDS 距离函数, 则仍然可能会出现技术退步的结果。

### (3) 投入和产出导向 MinDS 模型。

Tone 和 Aparicio 设计的求解 MinDS 模型的方法都是基于非导向的模型, 尽管 Tone 在其文章最后指出, 其方法能够同样应用于投入导向和产出导向的模型, 但事实并非如此。无论是 Tone 还是 Aparicio 设计的求解 MinDS 模型的方法都不适用于投入导向和产出导向的模型。

以 CRS 模型为例, 用 Tone 的方法建立的投入导向 MinDS 模型的规划式为

$$\begin{aligned} \max \rho_k^l &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (1 - s_i^- / x_{ik}) \\ \text{s. t. } \sum_{j \in E_p} x_{ij} \lambda_j + s_i^- &= x_k, i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{j \in E_p} y_{rj} \lambda_j &\geq y_k, r = 1, 2, \dots, q \end{aligned} \quad (4-19)$$

以 Aparicio 的方法建立的投入导向 MinDS 模型的规划式为

$$\begin{aligned} \max \rho_k^l &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (1 - s_i^- / x_{ik}) \\ \text{s. t. } \sum_{j \in E} x_{ij} \lambda_j + s_i^- &= x_k, i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{j \in E} y_{rj} \lambda_j &\geq y_k, r = 1, 2, \dots, q \\ \sum_{r=1}^q \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m \nu_i x_{ij} + d_j &= 0, j \in E \\ \nu_i &\geq 1, i = 1, 2, \dots, m \\ \mu_r &\geq 0, r = 1, 2, \dots, q \\ d_j &\leq M b_j, j \in E \\ \lambda_j &\leq M(1 - b_j), j \in E \\ b_j &\in \{0, 1\}, j \in E \\ d_j &\geq 0, j \in E \\ \lambda_j &\geq 0, j \in E \\ s_i^- &\geq 0, i = 1, 2, \dots, m \\ s_r^+ &\geq 0, r = 1, 2, \dots, q \end{aligned} \quad (4-20)$$

以最简单的单投入单产出的 CRS 模型为例, 假设有三个 DMU, 分别为  $A(x=4, y=1)$ 、 $B(x=3, y=3)$ 、 $C(x=6, y=4)$ , 如图 4-18 所示。求解 SBM 模型 (4-1) 可知  $B$  为有效 DMU,  $A$  和  $C$  为无效 DMU。然后通过模型 (4-19) 求解  $A$  的 MinDS 模型, 可得其效率值 = 1, 这与其为无效 DMU 的结论相矛盾。

图 4-18 有助于理解为什么在投入导向的模型中, 通过模型 (4-19) 求解 MinDS 模型会得到错误的结果。在投入导向 CRS 模型中, 目标函数是使  $A$  点与前沿的投入距离最小化, 从而使得  $A$  在前沿的投影点为  $A_l$ 。  $A_l$  的投入与  $A$  点相同,  $A$  的投入的松弛变量  $s^- = 0$ , 从而被误判为有效 DMU。前沿函数可以用从原点出发通过  $B$  点的射线  $OB$  表示, 即  $x - y = 0$ 。  $x$  和  $y$  的取值范围均为正实数, 所以所有无效 DMU 均可在射线  $OB$  上找到与自身投入相同的投影点, 从而实现其投入松弛变量为 0。

这种投影是以牺牲产出无效率来达到使投入的无效率最小化。虽然投影点为有效 DMU, 但是由于是投入导向模型, 对被评价 DMU 无效率的测量忽略了产出无效率, 从而使被评价 DMU 的无效率尽可能往产出上转移。例如, 在图中, 虽

然  $A_1$  的投入与  $A$  点相同, 但  $A_1$  的产出比  $A$  多,  $A$  的产出的松弛变量  $s^+ = 3$ , 但是产出松弛变量并没有在目标函数 (效率值) 中体现出来。

在单投入单产出的投入导向 CRS 模型中, 无效 DMU 总是可以通过牺牲产出松弛变量的方式来获得最小的投入松弛变量值, 并且最小的投入松弛变量值总是为 0。也就是说, 在单投入单产出的投入导向模型中, 如果通过 Tone 或 Aparicio 的方法求解无效 DMU 的 MinDS 模型, 所有无效 DMU 都会被错误地判定为有效。

同理, 在单投入单产出的产出导向 CRS 模型中, 无效 DMU 总是可以通过牺牲投入松弛变量的方式来获得最小的产出松弛变量值, 并且最小的产出松弛变量值总是为 0。在图 4-18 中, 通过产出导向 CRS 模型,  $A$  在前沿的投影点为  $A_0$ , 二者的产出相同, 即  $A$  的产出松弛变量为 0。

下面再看一个具有两个投入和一个产出的 CRS 模型的例子。如图 4-19 所示,  $B$ 、 $C$  两点为有效 DMU。根据 Tone 的证明, 由  $B$ 、 $C$  两点构成的线性组合 (系数为正数) 均为有效, 即  $E_1 = \{B, C\}$  是一个有效的子集。假设以  $B$ 、 $C$  两点作为参考集, 被评价 DMU 为  $G$  点, 则由式 (4-19) 所规定的可行域为  $MBC-NG$ , 因为目标函数的方向为最大化, 所以最优解为  $G$  点, 即为规划式所确定的最优解。由  $B$ 、 $C$  两点构成的线性组合与被评价 DMU ( $G$  点) 重合, 效率值为 1, 这显然与  $G$  点不在前沿相矛盾。在产出导向的模型中, 会出现相同的问题。

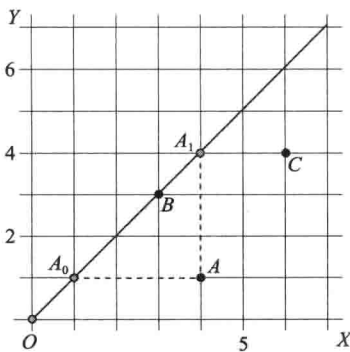


图 4-18 单投入单产出  
最小距离函数示例

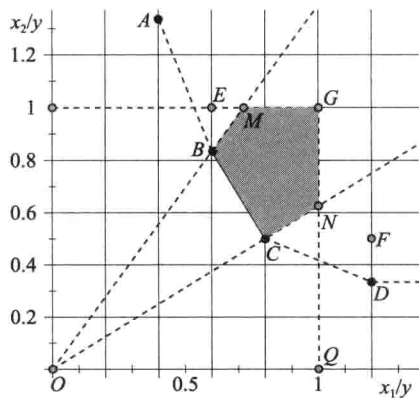


图 4-19 投入导向最大效率值  
求解错误示例

在 VRS 模型中, 通过 Tone 或 Aparicio 的方法求解 MinDS 模型会出现同样的错误。

#### \* 4.2.4 求解投入导向和产出导向 MinDS 模型的方法

在求解投入导向 MinDS 模型时, 目标函数要使投入的平均松弛变量值最小化, 这需要一个前提, 就是要首先保证投影点与被评价 DMU 的产出水平最接近。即虽然产出的松弛变量不计入距离函数, 但是首先要保证产出的松弛变量最小化, 然后才能使投入的松弛变量最小化。在单投入单产出的模型中, 总是可以实

现在投入导向 MinDS 模型中,使投影点的产出与被评价 DMU 的产出相等。如图 4-20 所示, A 点的正确投影值为  $A_1$ , A 的产出与  $A_1$  的产出相等。

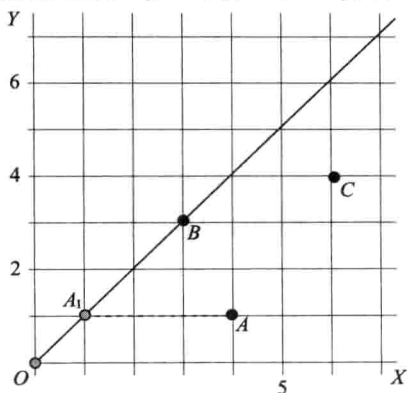


图 4-20 单投入单产出 CRS 模型正确求解最小距离函数示例

因此,要正确求解投入导向 MinDS 模型,需要对 Aparicio 求解 MinDS 模型的方法进行改进,以实现首先保证产出的松弛变量最小化,然后才是投入的松弛变量最小化这一目的。修改后的投入导向 MinDS 模型为

$$\begin{aligned} & \max \frac{1 - \varepsilon \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (s_i^- / x_{ik})}{1 + \frac{1}{q} \sum_{r=1}^q (s_r^+ / y_{rk})} \\ \text{s. t. } & \sum_{j \in E} x_{ij} \lambda_j + s_i^- = x_k, i = 1, 2, \dots, m \\ & \sum_{j \in E} y_{rj} \lambda_j - s_r^+ = y_k, r = 1, 2, \dots, q \\ & \sum_{r=1}^q \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m \nu_i x_{ij} + d_j = 0, j \in E \\ & \nu_i \geq 1, i = 1, 2, \dots, m \\ & \mu_r \geq 0, r = 1, 2, \dots, q \\ & d_j \leq M b_j, j \in E \\ & \lambda_j \leq M(1 - b_j), j \in E \\ & b_j \in \{0, 1\}, j \in E \\ & d_j \geq 0, j \in E \\ & \lambda_j \geq 0, j \in E \\ & s_i^- \geq 0, i = 1, 2, \dots, m \\ & s_r^+ \geq 0, r = 1, 2, \dots, q \end{aligned} \quad (4-21)$$

假设  $s_i^{-*}$  为模型 (4-21) 的最优解,则投入导向的最小距离函数效率值表

$$\text{示为 } \rho_k^I = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (1 - s_i^{-*} / x_{ik}).$$

$\varepsilon$  是一个足够小的正数, 即非阿基米德无穷小。模型 (4-20) 与模型 (4-21) 的区别是在模型 (4-21) 中, 投入的松弛变量都乘以一个系数, 该系数是一个很小的正数。在增加这样一个系数之后, 相对于产出松弛而言, 投入松弛变得不重要了, 投入松弛对目标函数的影响变得很小, 因而规划模型的目标函数会首先保证产出松弛变量的最小化; 在产出松弛变量达到最小化之后, 再寻求投入松弛变量的最小化, 从而实现设计目标。

模型 (4-21) 也可以不采用非阿基米德无穷小, 而是通过两阶段的方式来实现, 在第一阶段, 使平均产出松弛变量最小化:

$$\begin{aligned}
 \min \pi^+ &= \frac{1}{q} \sum_{r=1}^q (s_r^+ / y_{rk}) \\
 \text{s. t. } &\sum_{j \in E} x_{ij} \lambda_j + s_i^- = x_k, i = 1, 2, \dots, m \\
 &\sum_{j \in E} y_{rj} \lambda_j - s_r^+ = y_k, r = 1, 2, \dots, q \\
 &\sum_{r=1}^q \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m \nu_i x_{ij} + d_j = 0, j \in E \\
 &\nu_i \geq 1, i = 1, 2, \dots, m \\
 &\mu_r \geq 1, r = 1, 2, \dots, q \\
 &d_j \leq M b_j, j \in E \\
 &\lambda_j \leq M(1 - b_j), j \in E \\
 &b_j \in \{0, 1\}, j \in E \\
 &d_j \geq 0, j \in E \\
 &\lambda_j \geq 0, j \in E \\
 &s_i^- \geq 0, i = 1, 2, \dots, m \\
 &s_r^+ \geq 0, r = 1, 2, \dots, q
 \end{aligned} \tag{4-22}$$

假设最优解为  $\pi^{+*}$ , 在第二阶段, 使平均投入松弛变量最小化:

$$\begin{aligned}
 \max 1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (s_i^- / x_{ik}) \\
 \text{s. t. } &\sum_{j \in E} x_{ij} \lambda_j + s_i^- = x_k, i = 1, 2, \dots, m \\
 &\sum_{j \in E} y_{rj} \lambda_j - s_r^+ = y_k, r = 1, 2, \dots, q \\
 &\frac{1}{q} \sum_{r=1}^q (s_r^+ / y_{rk}) = \pi^{+*} \\
 &\sum_{r=1}^q \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m \nu_i x_{ij} + d_j = 0, j \in E \\
 &\nu_i \geq 1, i = 1, 2, \dots, m \\
 &\mu_r \geq 0, r = 1, 2, \dots, q \\
 &d_j \leq M b_j, j \in E \\
 &\lambda_j \leq M(1 - b_j), j \in E
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 b_j &\in \{0, 1\}, j \in E \\
 d_j &\geq 0, j \in E \\
 \lambda_j &\geq 0, j \in E \\
 s_i^- &\geq 0, i = 1, 2, \dots, m \\
 s_r^+ &\geq 0, r = 1, 2, \dots, q
 \end{aligned} \tag{4-23}$$

同理，产出导向最小距离函数可以通过以下包含非阿基米德无穷小的模型求解，也可以通过上述两阶段的方式实现：

$$\begin{aligned}
 \max \quad & \frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (s_i^- / x_{ik})}{1 + \varepsilon \frac{1}{q} \sum_{r=1}^q (s_r^+ / y_{rk})} \\
 \text{s. t.} \quad & \sum_{j \in E} x_{ij} \lambda_j + s_i^- = x_k, i = 1, 2, \dots, m \\
 & \sum_{j \in E} y_{rj} \lambda_j - s_r^+ = y_k, r = 1, 2, \dots, q \\
 & \sum_{r=1}^q \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m \nu_i x_{ij} + d_j = 0, j \in E \\
 & \nu_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m \\
 & \mu_r \geq 1, r = 1, 2, \dots, q \\
 & d_j \leq M b_j, j \in E \\
 & \lambda_j \leq M(1 - b_j), j \in E \\
 & b_j \in \{0, 1\}, j \in E \\
 & d_j \geq 0, j \in E \\
 & \lambda_j \geq 0, j \in E \\
 & s_i^- \geq 0, i = 1, 2, \dots, m \\
 & s_r^+ \geq 0, r = 1, 2, \dots, q
 \end{aligned} \tag{4-24}$$

假设  $s_r^{+*}$  为模型 (4-21) 的最优解，则产出导向的最小距离函数效率值表示为  $\rho_k^0 = \frac{1}{1 + \frac{1}{q} \sum_{r=1}^q (s_r^{+*} / y_{rk})}$ 。

从理论上，难以对投入和产出导向 MinDS 模型作出准确的定义，这是求解面临的首要问题。虽然通过上述包含  $\varepsilon$  参数或两阶段方法可以求解投入导向和产出导向 MinDS 模型，但是，以两阶段方法为例，模型在第一阶段如果只有一个最优解，则在第二阶段可行解只有一个，没有选择的余地；只有在第一阶段存在多个最优解时，在第二阶段才会有多个可行解，并在可行解中求得一个最优解。所以，与投入（产出）导向的 SBM 模型相比，投入（产出）导向的 MinDS 模型的效率值一般提高不大，甚至没有提高。投入导向和产出导向 MinDS 模型需要在理论和求解方法上继续进行探讨。

#### 4.2.5 MaxDEA 求解投入导向和产出导向 MinDS 模型示例

本节以表 2-6 的数据为例, 来说明 MaxDEA 求解投入导向 MinDS 模型的过程。

在包络模型设置界面, Distance、RTS 及大 M 值的设置与非导向模型相同。在 Orientation 设置界面, 投入导向选择 “Input - oriented (modified)”, 产出导向选择 “Output - oriented (modified)” (见图 4-21)。

在 Options 设置界面, 选择或设置一个合适的  $\varepsilon$  值 (Epsilon for Modified Orientations)。 $\varepsilon$  值设置过大或过小均会造成较大误差, 建议设置范围为 0.0001 ~ 0.001 (见图 4-22)。

投入导向 MinDS 模型与投入导向 SBM 模型及产出导向 MinDS 模型与产出导向 SBM 模型的效率值比较见表 4-22。

MinDS 模型与 SBM 模型比较: 25 个无效 DMU, 其投入导向 MinDS 模型效率值比投入导向 SBM 效率值平均高出 0.020, 其中 3 个 DMU 两种模型效率值相同; 其产出导向 MinDS 模型效率值比产出导向 SBM 效率值平均高出 0.014, 其中 17 个 DMU 两种模型效率值相同。

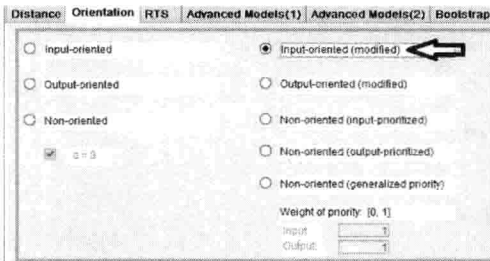


图 4-21 设置 Orientation

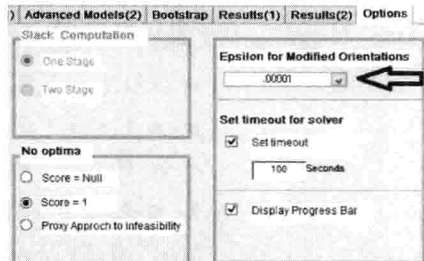


图 4-22 设置  $\varepsilon$

投入导向和产出导向 MinDS 模型的效率值与非导向 MinDS 模型之间的数量关系不固定: 投入导向与非导向相比, 在 25 个无效 DMU 中, 有 4 个 DMU 投入导向 MinDS 模型的效率值较高, 有 19 个 DMU 非导向 MinDS 模型效率值较高, 有 2 个 DMU 二者相等; 产出导向与非导向相比, 有 2 个 DMU 产出导向效率值较高, 有 21 个 DMU 非导向效率值较高, 有 2 个 DMU 二者相等。

表 4-22 投入导向和产出导向 MinDS 模型与 SBM 模型效率值比较 (CRS)<sup>①</sup>

地区	非导向 MinDS	投入 MinDS	投入导向 SBM	产出导向 MinDS	产出导向 SBM
安徽	0.9556	0.9390	0.9325	0.7038	0.7038
北京	0.7636	0.7984	0.7984	0.7956	0.7956
福建	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
甘肃	0.9047	0.8724	0.8231	0.7313	0.7063
广东	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
广西	0.9732	0.9682	0.9622	0.8755	0.8755

① 注意本表分析数据为表 2-6 各地区医院部分投入产出指标 (2011 年)。

## 4.3 方向距离函数

### 4.3.1 方向距离函数模型

方向距离函数模型 (Directional Distance Function, DDF) 是对径向 DEA 模型的一般化表达 (Chung, et al., 1997)。在方向距离函数模型中, 可以由研究者自定义被评价 DMU 往前沿上投影的方向。在欧氏空间中, 投影方向由方向向量决定, 该方向向量由投入方向向量  $v$  和产出方向向量  $u$  构成, 这是方向向量模型的最主要特征。在构成方向向量的元素中, 不同投入和产出指标的方向向量值代表了其相对重要或优先程度。例如, 如果有两项投入, 投入向量设置为 (2, 1), 则代表在向前沿投影时, 优先考虑投入 1 的改进, 每投入 1 改进 2 个单位, 投入 2 改进 1 个单位。

在图 4-23 投入导向方向距离函数模型示例中,  $v_1$  和  $v_2$  分别定义了两个方向向量, 使  $G$  点在前沿上的投影分别为  $B$  点和  $C$  点。理论上讲, 通过定义方向向量, 可以使无效 DMU 沿任意设定的方向投影到前沿。

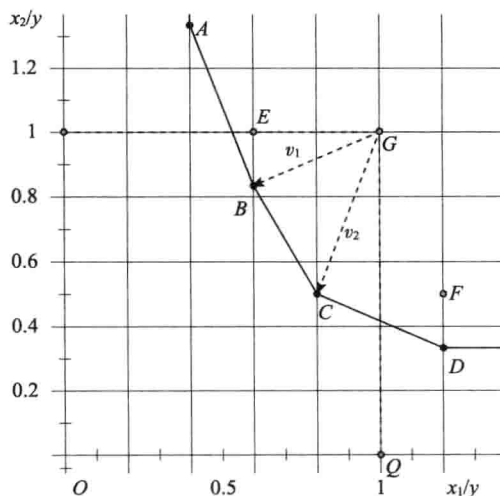


图 4-23 投入导向方向距离函数模型示例

以评价  $DMU_k$  为例, 方向向量模型的规划式表示为

$$\begin{aligned}
 & \max \beta \\
 & \text{s. t. } X\lambda + \beta g_x \leq x_k \\
 & \quad Y\lambda - \beta g_y \geq y_k \\
 & \quad \lambda \geq 0
 \end{aligned} \tag{4-25}$$

在模型 (4-25) 中, 对无效率程度的测量 ( $\beta$ ) 包含了投入和产出两个方面, 因此属于非导向的方向距离函数模型。

模型 (4-25) 为 CRS 模型, 在此基础上增加约束  $\sum \lambda = 1$ , 即为 VRS 模型。

方向距离函数的分析结果 ( $\beta$ ) 与投入和产出指标的测量单位无关。也就是说, 对于同一组数据, 只要方向向量不变, 投入和产出指标的测量单位发生改变后, 模型的结果 ( $\beta$ ) 保持不变。但需要注意的一点是, 方向向量值是有单位的数值, 其单位与对应的投入或产出指标的单位一致<sup>①</sup>。例如, 在表 2-6 的数据中, 各项指标的单位分别为个、人、人次、人, 如果方向向量记为 (1, 1, 1, 1), 是省略了测量单位, 实际代表 1 个床位、1 人、1 人次、1 人。假设诊疗人次数采用“万人次”作为单位, 其他指标的单位保持不变, 则诊疗人次数方向向量值也要以“万人次”作为单位, 变化后的方向向量为 (1, 1, 0.0001, 1), 其实际代表 1 个床位、1 人、0.0001 万人次、1 人, 也就是说方向向量值还是分别代表 1 个床位、1 人、1 人次、1 人。方向向量的数值如果不做上述调整, 则意味着方向向量发生了改变, 模型的分析结果也会相应地发生改变。

与径向模型相似, 在方向距离函数模型中, 也存在松弛问题。同样也可以通过两阶段方法来求解松弛变量值, 即在第二阶段求解模型

$$\begin{aligned} & \max \sum (s^- + s^+) \\ \text{s. t. } & X\lambda + s^- = x_k - \beta^* g_x \\ & Y\lambda - s^+ = y_k + \beta^* g_y \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned} \quad (4-26)$$

#### 4.3.2 方向距离函数模型的乘数形式

CRS 方向距离函数模型 (4-25) 的乘数形式 (对偶模型) 为

$$\begin{aligned} & \min \sum_{i=1}^m v_i x_{ik} - \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rk} \\ \text{s. t. } & \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} \leq 0 \\ & \sum_{i=1}^m v_i g_x - \sum_{r=1}^s \mu_r g_y = 1 \\ & v \geq 0; \mu \geq 0 \end{aligned} \quad (4-27)$$

其他 RTS 类型的方向距离函数的乘数形式为

$$\begin{aligned} & \min \sum_{i=1}^m v_i x_{ik} - \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rk} + \mu_0 \\ \text{s. t. } & \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} + \mu_0 \leq 0 \\ & \sum_{i=1}^m v_i g_x - \sum_{r=1}^s \mu_r g_y = 1 \\ & v \geq 0; \mu \geq 0 \\ & \text{VRS: } \mu_0 \text{ free} \end{aligned}$$

<sup>①</sup>  $\beta$  是没有单位的系数, 所以方向向量值必须是有单位的, 并且其单位与相应的投入或产出指标一致, 否则线性规划不等式两侧将不对等。

$$\text{NIRS: } \mu_0 \geq 0$$

$$\text{NDRS: } \mu_0 \leq 0$$

#### 4.3.3 方向距离函数模型中对坏产出的处理及对弱可处置性是否合理的讨论

如果存在坏产出 (Bad Outputs, 或称 Undesirable Outputs, 非期望产出) 的情况 (如生产过程中产生的污染排放), 可以在方向距离函数模型中对产出进行区分, 将好产出记为  $Y$ , 坏产出记为  $B$ , 相应的产出向量区分为好产出向量  $g_y$  和坏产出向量  $g_b$ 。在模型中能对好产出和坏产出进行区别对待是方向距离函数模型的主要功能之一。区分好坏产出之后的模型表示为

$$\begin{aligned} & \max \beta \\ & \text{s. t. } X\lambda + \beta g_x \leq x_k \\ & \quad Y\lambda - \beta g_y \geq y_k \\ & \quad B\lambda - \beta g_b \geq b_k \end{aligned} \quad (4-28)$$

投入、好产出和坏产出的方向向量值通常采用  $g_x \geq 0$ ,  $g_y \geq 0$ ,  $g_b \leq 0$ , 表示无效 DMU 的改进方向为减少投入、增加好产出、减少坏产出。

模型 (4-28) 的生产可能集为

$$S = \{ (x, y) \mid x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, b \leq B\lambda \} \quad (4-29)$$

根据这一生产可能集的定义, 在投入和好产出既定的条件下, 坏产出可以减少, 甚至可以是 0, 这显然与实际生产技术不符。在存在坏产出的生产过程中, 坏产出往往是不可避免的。技术水平的进步可以减少坏产出的数量, 但不能超越生产技术水平无限减少。换句话说, 坏产出减少的数量不能超越生产前沿。

因此, 方向距离函数模型需要修改为

$$\begin{aligned} & \max \beta \\ & \text{s. t. } X\lambda + \beta g_x \leq x_k \\ & \quad Y\lambda - \beta g_y \geq y_k \\ & \quad B\lambda - \beta g_b \leq b_k \\ & \quad \lambda \geq 0 \end{aligned} \quad (4-30)$$

模型 (4-30) 的生产可能集为

$$S = \{ (x, y) \mid x \geq X\lambda, y \leq Y\lambda, b \geq B\lambda \} \quad (4-31)$$

模型 (4-30) 的生产可能集表示在投入既定的条件下, 可以减少好产出或增加坏产出。我们利用表 4-23 中的数据来直观地理解模型 (4-30) 的生产可能集,  $x$  为投入,  $y$  为产出,  $b$  为非期望产出。在图 4-24 中 7 个 DMU 定义的生产可能集为  $OBCD$  沿纵坐标往上无限扩展的阴影区域。这个生产可能集表示, 在投入不变的情况下, 在投入既定的条件下, 坏产出可以无限的增加, 这表示坏产出的强可处置性, 在此将模型 (4-30) 称为强可处置非期望产出方向距离函数模型。

表 4-23 方向距离函数模型示例数据

DMU	$x$	$y$	$b$
A	1.0	2.0	1.0
B	1.0	3.5	1.5
C	1.0	4.2	2.0
D	1.0	4.5	2.8
E	1.0	1.8	2.0
F	1.0	2.0	2.5
G	1.0	3.0	3.0

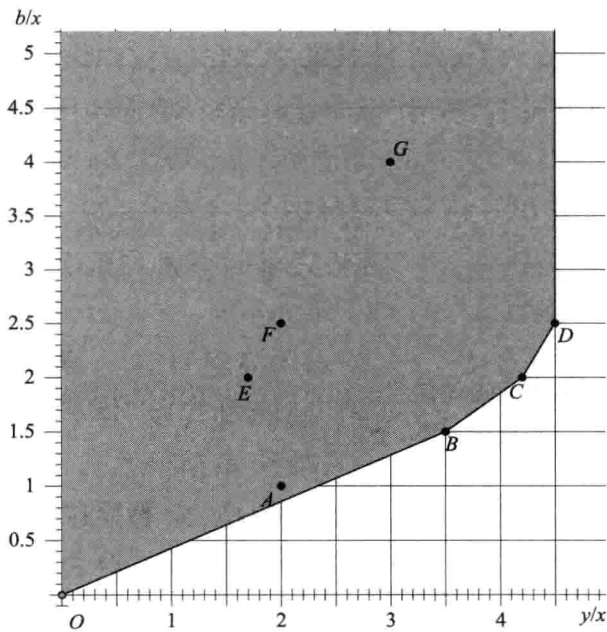


图 4-24 强可处置非期望产出方向距离函数的生产可能集

模型(4-30)所定义的强可处置非期望产出方向距离函数模型,其生产可能集是不合逻辑的。在实际生产中,坏产出的数量不可能无限增加,它不应该超越生产过程所能产生的最大数量。以燃煤锅炉供暖的生产过程为例,该生产过程会排放 $\text{SO}_2$ , $\text{SO}_2$ 的排放数量决定于煤炭质量、生产工艺和废气处理等因素,技术进步可以使排放数量逐步降低,这是我们所期望的结果。但反过来,从生产可能性上讲,使用质量最差的煤炭并且不进行任何的废气处理可以使 $\text{SO}_2$ 排放数量达到最大化,但是这个最大值受到所消耗的煤炭数量(投入)的限制,在煤炭数量一定的情况下, $\text{SO}_2$ 排放数量不可能无限增加。所以,强可处置非期望产出方向距离函数模型的生产可能集存在逻辑错误。

为了避免这一问题, Chung 等人 (1997) 提出的方向距离函数模型中, 对生产可能集作了如下定义。

(1) 坏产出具有弱可处置性, 其意义为要减少坏产出, 好产出也必须减少, 即在投入既定的条件下, 如果  $(y, b) \in P(x)$ , 则  $(\theta y, \theta b) \in P(x)$ ,  $0 \leq \theta \leq 1$ 。

(2) 好产出具有强可处置性, 即在投入既定的条件下, 如果  $(y, b) \in P(x)$ , 则  $(y - s, b) \in P(x)$ ,  $s \geq 0$ 。

(3) 如果坏产出为 0, 则好产出也为 0, 即如果  $(y, b) \in P(x)$  且  $b = 0$ , 则  $y = 0$ 。

坏产出弱可处置的方向距离函数表示为

$$\begin{aligned} \max \quad & \beta \\ \text{s. t.} \quad & X\lambda + \beta g_x \leq x_k \\ & Y\lambda - \beta g_y \geq y_k \\ & B\lambda - \beta g_b = b_k \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned} \quad (4-32)$$

在对非期望产出进行弱可处置性约束之后, 其生产可能集缩减为图 4-25 中  $OBCDGQ$  所围成的有限区域 (阴影区域)。

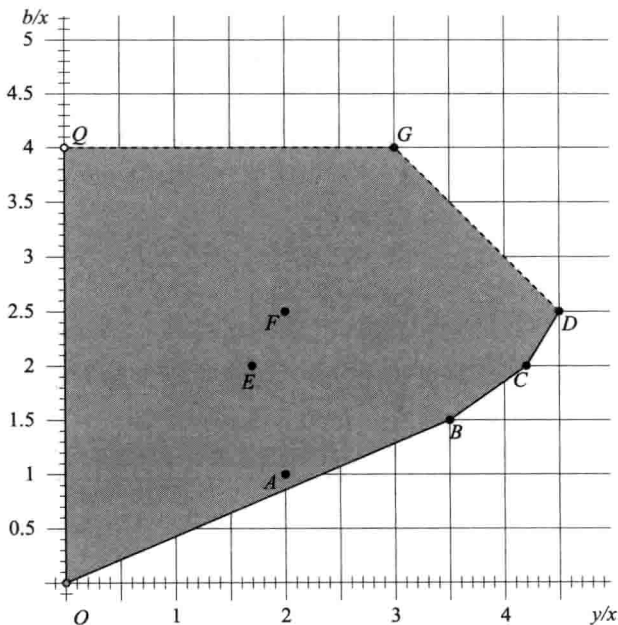


图 4-25 弱可处置非期望产出方向距离函数的生产可能集

我们以  $G$  为例来分析弱可处置性对模型产生的影响。 $G$  在 7 个 DMU 中, 坏

①  $P(x)$  表示产出集, 即  $P(x) = \{(y, b) \mid x \text{ 能生产 } (y, b)\}$ 。

产出最高, 好产出低于  $B$ 、 $C$  和  $D$ 。假设  $G$  将从以下三种方案来增进其生产效率。

方案 1: 保持投入和坏产出不变, 通过增加好产出的途径来提高效率。要达到这样的目的, 投入、好产出和坏产出对应的方向向量值可以为  $(0, 1, 0)$ , 其方向距离函数线性规划式表示为

$$\begin{aligned} \max \quad & \beta \\ \text{s. t.} \quad & X\lambda \leq x_G \\ & Y\lambda - \beta \geq y_G \\ & B\lambda = b_G \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned} \quad (4-33)$$

方案 2: 保持投入不变, 通过降低坏产出并同时增加好产出来提高效率, 好产出增加量与坏产出减少量之比为 2:1。要达到这样的目的, 投入、好产出和坏产出对应的方向向量值可以为  $(0, 2, -1)$ , 其方向距离函数线性规划式表示为<sup>①</sup>

$$\begin{aligned} \max \quad & \beta \\ \text{s. t.} \quad & X\lambda \leq x_G \\ & Y\lambda - 2\beta \geq y_G \\ & B\lambda + \beta = b_G \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned} \quad (4-34)$$

方案 3: 保持投入不变, 通过降低坏产出并同时增加好产出来提高效率, 好产出增加量与坏产出减少量之比为 1:2。要达到这样的目的, 投入、好产出和坏产出对应的方向向量值可以为  $(0, 1, -2)$ , 其方向距离函数线性规划式表示为

$$\begin{aligned} \max \quad & \beta \\ \text{s. t.} \quad & X\lambda \leq x_G \\ & Y\lambda - \beta \geq y_G \\ & B\lambda + 2\beta = b_G \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned} \quad (4-35)$$

上述三个方案的分析结果见表 4-24。根据方案 1 和方案 2,  $G$  的投影均为其自身, 只有方案 3 的投影为前沿上  $B$  和  $C$  的线性组合。

表 4-24 弱可处置非期望产出方向距离函数的分析结果 (以  $G$  为例)

方 案	$\beta$	参考标杆	$x$	$y$	$b$
方案 1	0.0000	$G$ (1.0000)	1	3	4
方案 2	0.0000	$G$ (1.0000)	1	3	4
方案 3	1.0526	$B$ (0.2105); $C$ (0.7895)	1	4.0526	1.8947

① 前面介绍的坏产出的弱可处置性 (要减少坏产出就必须同时减少好产出) 是针对生产技术的生产可能集而言的, 考虑的是技术 (生产前沿) 的可能性。此处讲的降低坏产出并同时增加好产出是指无效 DMU 的改进方式, 即无效 DMU 往前沿做投影的方向。以污染排放为例, 影响生产者决策的因素不仅受到内部生产状况的影响, 也受到外部因素的影响, 例如法律对污染排放的处罚力度, 不要将二者混淆。



受到坏产出弱可处置性的约束, 生产可能集(模型线性规划的可行域)缺少了  $G$  右下方的区域(图4-26中  $GDG_2$  三角形区域), 因此  $G$  点无法向这一区域做投影。

那么因坏产出的弱可处置性约束而丢失的生产可能集的  $GDG_2$  三角形区域, 在实际生产中是否是可行的呢?

还是以燃煤锅炉供暖的生产过程为例。在同样的投入数量下,  $G$  生产了3个单位的好产出和4个单位的坏产出, 而  $D$  生产了4.5个单位的好产出和2.5个单位的坏产出。 $D$  的生产效率优于  $G$ , 主要是缘于其生产工艺的改进和对废气的处理, 从生产可能上讲,  $D$  在保持好产出不变的情况下, 通过降低对废气的处理, 完全可以达到  $G$  的坏产出的数量水平, 即如果让  $D$  生产4.5个单位的好产出, 同时产生4个单位的坏产出是能够做到的。这说明, 因坏产出的弱可处置性约束而丢失的生产可能集区域中, 有部分区域实际上应该属于生产可能集。

在投入和好产出既定的条件下, 在一定范围内增加坏产出, 从生产技术上是不可能的。

坏产出弱可处置性的约束还会造成另外一个难题。表面上看, 坏产出弱可处置性 VRS 模型是在 CRS 模型的基础上增加约束  $\sum \lambda = 1$ , 即

$$\begin{aligned} & \max \beta \\ & \text{s. t. } X\lambda + \beta g_x \leq x_k \\ & \quad Y\lambda - \beta g_y \geq y_k \\ & \quad B\lambda - \beta g_b = b_k \\ & \quad e\lambda = 1 \\ & \quad \lambda \geq 0 \end{aligned} \quad (4-36)$$

Färe R 和 Grosskopf (2003) 指出, 模型(4-36)并非正确的坏产出弱可处置性的 VRS 模型, 正确的模型应该为<sup>①</sup>

$$\begin{aligned} & \max \beta \\ & \text{s. t. } X\lambda + \beta g_x \leq x_k \\ & \quad \pi Y\lambda - \beta g_y \geq y_k \\ & \quad \pi B\lambda - \beta g_b = b_k \\ & \quad e\lambda = 1 \\ & \quad 0 \leq \pi \leq 1 \\ & \quad \lambda \geq 0 \end{aligned} \quad (4-37)$$

但是, 模型(4-37)至少存在三个方面的问题: ①它是非线性规划, 比线性规划求解要困难; ②生产可能集并非凸多面体; ③不符合单调性, 即可能会出现被评价 DMU 增加坏产出后效率反而提高的不合理结果(Chen C M, 2013)。

现在再回头分析一下, 如果在上述三种方案中, 取消对坏产出的弱可处

① 在 MaxDEA 软件中, 非期望产出弱可处置性 VRS 模型采用的是模型(4-36), 需慎重使用。

置性约束, 是否会导致方向向量模型的结果产生错误呢? 三种方案的线性规划模型如下。

### 方案 1

$$\begin{aligned}
 & \max \beta \\
 & \text{s. t. } X\lambda \leq x_G \\
 & \quad Y\lambda - \beta \geq y_G \\
 & \quad B\lambda \leq b_G \\
 & \quad \lambda \geq 0
 \end{aligned} \tag{4-38}$$

### 方案 2

$$\begin{aligned}
 & \max \beta \\
 & \text{s. t. } X\lambda \leq x_G \\
 & \quad Y\lambda - 2\beta \geq y_G \\
 & \quad B\lambda + \beta \leq b_G \\
 & \quad \lambda \geq 0
 \end{aligned} \tag{4-39}$$

### 方案 3

$$\begin{aligned}
 & \max \beta \\
 & \text{s. t. } X\lambda \leq x_G \\
 & \quad Y\lambda - \beta \geq y_G \\
 & \quad B\lambda + 2\beta \leq b_G \\
 & \quad \lambda \geq 0
 \end{aligned} \tag{4-40}$$

分析结果见表 4-25, 从结果看,  $G$  的投影值是合乎逻辑的。方案 3 的结果与弱可处置性模型相同, 方案 1 和方案 2 的投影点均为  $D$  点。为什么模型的分析结果并没有受到其存在逻辑错误的生产可能集的影响呢?

表 4-25 强可处置非期望产出方向距离函数的分析结果 (以  $G$  为例)

方 案	$\beta$	参考标杆	$x$	$y$	$b$
方案 1	1.5000	$D$ (1.0000)	1	4.5	2.5
方案 2	0.7500	$D$ (1.0000)	1	4.5	2.5
方案 3	1.0526	$B$ (0.2105); $C$ (0.7895)	1	4.0526	1.8947

事实上, 在强可处置非期望产出方向距离函数模型中, 被评价 DMU 的投影方向通常是增加好产出、减少坏产出<sup>①</sup>。任何被评价 DMU 的坏产出的投影值都

① 极端的情况是完全不考虑坏产出数量的多少。例如, 政府对污染排放没有任何处罚, 在这种情况下, 从生产者的角度, 只会考虑增加好产出, 建立的模型中不需加入坏产出, 只有好产出即可, 此时也就不存在坏产出是强可处置还是弱可处置的问题了。另外, 理性的决策不会追求不增加好产出而只增加坏产出。如果决策者追求同时增加好产出和坏产出, 即好产出和坏产出的方向向量值均为正数。在规划式中, 坏产出约束的不等号方向决定了模型的最优解也通常不会超出生产技术所可能实现的范围, 因为在最优解中, 坏产出与好产出以一定比例同时增加, 好产出不可能无限增加, 所以坏产出也不会无限增加。除非, 好产出和坏产出的方向向量值被设置为极不合理的数值, 如  $g_y = 1$ ,  $g_b =$  非常大的不合理数值。

不会比其原始值更大, 因此存在逻辑错误的生产可能集并不会对被评价 DMU 的投影产生影响。以  $G$  点为例, 在图 4-26 中, 在追求增加好产出并减少坏产出的目标下 (即好产出的方向向量为正数, 坏产出的方向向量为负数),  $G$  的投影范围为其右下的生产可能集区域, 即  $GG_1BCDG_2$  多边形区域, 由强可处置坏产出引起的生产可能集无限往上延伸的区域并不会成为被评价 DMU 的投影区域。

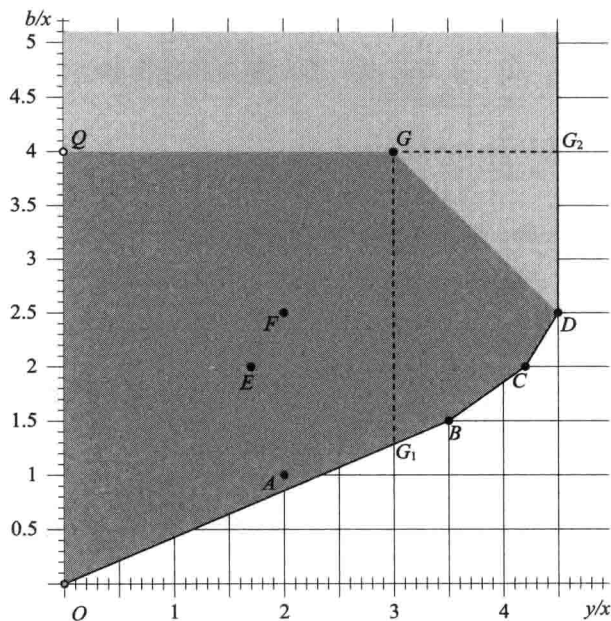


图 4-26 强可处置非期望产出方向距离函数的投影

通过以上分析, 笔者认为, 在方向距离函数模型中, 对非期望产出进行弱可处置性约束, 虽然获得广泛认可, 却是一种似是而非的处理方法。一句话, 虽然非期望产出强可处置模型的生产可能集是错误的, 但是模型的结果是正确的。建议在存在非期望产出时, 不要对非期望产出进行弱可处置性约束。

#### 4.3.4 方向距离函数模型的几种特例

方向距离函数模型是对径向模型的推广。当方向向量取被评价 DMU 的投入产出值时, 方向距离函数模型与径向 DEA 模型相同, 这时方向距离函数模型中的  $\beta^*$  与投入导向径向 DEA 模型效率值  $\theta^*$  的关系为  $\beta^* = 1 - \theta^*$ , 与产出导向径向 DEA 模型效率值  $1/\varphi^*$  的关系为  $1/\varphi^* = 1/(1 + \beta^*)$ 。

当方向向量为  $g_x = x_k$ ,  $g_y = 0$  时, 方向距离函数模型与投入导向径向模型等价:

$$\begin{aligned} \max \beta \text{ 或 } \min \theta &= 1 - \beta \\ \text{s. t. } X\lambda + \beta x_k &\leq x_k \equiv X\lambda \leq (1 - \beta)x_k \equiv X\lambda \leq \theta x_k \\ Y\lambda &\geq y_k \\ \lambda &\geq 0 \end{aligned} \quad (4-41)$$

当方向向量为  $g_x = 0$ ,  $g_y = y_k$  时, 方向距离函数模型与产出导向径向模型等价:

$$\begin{aligned} & \max \beta \text{ 或 } \max \varphi = 1 + \beta \\ & \text{s. t. } X\lambda \leq x_k \\ & \quad Y\lambda - \beta y_k \geq y_k \equiv Y\lambda_k \geq (1 + \beta)y_k \equiv Y\lambda_k \geq \varphi y_k \\ & \quad \lambda \geq 0 \end{aligned} \quad (4-42)$$

当方向向量为  $g_x = x_k$ ,  $g_y = y_k$  时, 方向距离函数模型是非导向径向模型的一种形式:

$$\begin{aligned} & \max \beta \text{ 或 } \min \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \\ & \text{s. t. } X\lambda + \beta x_k \leq x_k \equiv X\lambda \leq (1 - \beta)x_k \\ & \quad Y\lambda - \beta y_k \geq y_k \equiv Y\lambda_k \geq (1 + \beta)y_k \\ & \quad \lambda \geq 0 \end{aligned} \quad (4-43)$$

当存在非期望产出时, 上述三种特例如下。

当方向向量为  $g_x = x_k$ ,  $g_y = 0$ ,  $g_b = 0$  时, 方向距离函数模型与包含非期望产出的投入导向径向模型等价:

$$\begin{aligned} & \max \beta \text{ 或 } \min \theta = 1 - \beta \\ & \text{s. t. } X\lambda + \beta x_k \leq x_k \equiv X\lambda \leq (1 - \beta)x_k \equiv X\lambda \leq \theta x_k \\ & \quad Y\lambda \geq y_k \\ & \quad B\lambda \leq b_k \\ & \quad \lambda \geq 0 \end{aligned} \quad (4-44)$$

当方向向量为  $g_x = 0$ ,  $g_y = y_k$ ,  $g_b = -b_k$  时, 方向距离函数模型与包含非期望产出的产出导向径向模型等价:

$$\begin{aligned} & \max \beta \text{ 或 } \min 1/\varphi = \frac{1}{1 + \beta} \\ & \text{s. t. } X\lambda \leq x_k \\ & \quad Y\lambda - \beta y_k \geq y_k \equiv Y\lambda_k \geq (1 + \beta)y_k \equiv Y\lambda_k \geq \varphi y_k \\ & \quad B\lambda + \beta b_k \leq b_k \equiv B\lambda \leq (1 - \beta)b_k \\ & \quad \lambda \geq 0 \end{aligned} \quad (4-45)$$

当方向向量为  $g_x = x_k$ ,  $g_y = y_k$ ,  $g_b = -b_k$  时, 方向距离函数模型与包含非期望产出的非导向径向模型等价:

$$\begin{aligned} & \max \beta \text{ 或 } \min \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \\ & \text{s. t. } X\lambda + \beta x_k \leq x_k \equiv X\lambda \leq (1 - \beta)x_k \\ & \quad Y\lambda - \beta y_k \geq y_k \equiv Y\lambda_k \geq (1 + \beta)y_k \\ & \quad B\lambda + \beta b_k \leq b_k \equiv B\lambda \leq (1 - \beta)b_k \\ & \quad \lambda \geq 0 \end{aligned} \quad (4-46)$$

## \*4.3.5 一般方向距离函数模型效率值的计算方法

除上述特例以外,无法直接使用 $\beta^*$ 来代表无效率值, $\beta^*$ 受到方向向量长度的影响。例如,针对同一DMU的方向距离函数模型,假设方向向量采用 $(1, 1, \dots)$ 时,结果 $\beta^* = 0.5$ ,则如果方向向量采用 $(2, 2, \dots)$ ,结果 $\beta^* = 0.25$ 。

$\beta g_{x_i}$ 表示各项投入的改进数量; $\beta g_{x_i}/x_{ik}$ 表示各项投入的改进比例; $\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \beta g_{x_i}/x_{ik}$ 表示各项投入的平均改进比例,可用来代表投入的无效率程度; $\beta g_{y_r}$ 表示产出的改进数量; $\beta g_{y_r}/y_{rk}$ 表示产出的改进比例; $\frac{1}{q} \sum_{r=1}^q \beta g_{y_r}/y_{rk}$ 表示各项产出的平均改进比例,可用来代表产出的无效率程度。因此,可以将方向距离函数效率值定义为(Cheng & Zervopoulos, 2014):

$$\theta_k = \frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \beta g_{x_i}/x_{ik}}{1 + \frac{1}{q} \sum_{r=1}^q \beta g_{y_r}/y_{rk}} \quad (4-47)$$

由于 $\beta$ 与目标函数之间的单调变化关系,下面两种计算效率值的方式结果相同。

(1) 先通过求解方向距离函数模型获得最优解 $\beta^*$ ,然后再用 $\beta^*$ 计算效率值 $\theta$ ;

(2) 直接采用效率值的计算公式作为方向距离函数模型的目标函数,即

$$\begin{aligned} \min \theta_k &= \frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \beta g_{x_i}/x_{ik}}{1 + \frac{1}{q} \sum_{r=1}^q \beta g_{y_r}/y_{rk}} \\ \text{s. t. } X\lambda + \beta g_x &\leq x_k \\ Y\lambda - \beta g_y &\geq y_k \\ \lambda &\geq 0 \end{aligned} \quad (4-48)$$

投入导向方向距离函数模型的效率值为<sup>①</sup>

$$\begin{aligned} \min \theta_k &= 1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \beta g_{x_i}/x_{ik} \\ \text{s. t. } X\lambda + \beta g_x &\leq x_k \\ Y\lambda &\geq y_k \\ \lambda &\geq 0 \end{aligned} \quad (4-49)$$

产出导向方向距离函数模型的效率值为

<sup>①</sup> 投入导向的方向距离函数与在非导向方向距离函数中,产出方向向量值=0等价;产出导向的方向距离函数与在非导向方向距离函数中,投入方向向量值=0等价。

$$\begin{aligned} \min \theta_k &= \frac{1}{1 + \frac{1}{q} \sum_{r=1}^q \beta g_{y_r} / y_{rk}} \\ \text{s. t. } X\lambda &\leq x_k \\ Y\lambda - \beta g_y &\geq y_k \\ \lambda &\geq 0 \end{aligned} \quad (4-50)$$

方向距离函数效率值的定义 (4-47) 具有以下特点:

(1) 保持了与径向 DEA 模型效率值的一致性 (兼容性)。当方向向量取上文中所说的与径向模型等价的三种特殊情形时, 方向距离函数模型得出的效率值与径向模型相同。

(2) 定义 (4-47) 得出的方向距离函数效率值与模型中所采用的方向向量的长度无关。例如, 在同一模型中, 方向向量取所有元素均为 1 的向量 (1, 1, ..., 1) 和所有元素均为 2 的向量 (2, 2, ..., 2) 得出的效率值相等。

(3) 在定义 (4-47) 的基础上, 可以方便地对投入和产出指标进行加权处理, 以体现不同指标的重要程度。

$$\theta_k = \frac{1 - \frac{1}{\sum w_i^I} \sum_{i=1}^m w_i^I \beta g_{x_i} / x_{ik}}{1 + \frac{1}{\sum w_r^O} \sum_{r=1}^q w_r^O \beta g_{y_r} / y_{rk}} \quad (4-51)$$

当存在非期望产出时,

$$\theta_k = \frac{1 - \frac{1}{\sum w_i^I} \sum_{i=1}^m w_i^I \beta g_{x_i} / x_{ik}}{1 + \frac{1}{\sum w_r^G + \sum w_r^B} \left( \sum_{r=1}^q w_r^G \beta g_{y_r} / y_{rk} + \sum_{i=1}^p w_i^B \beta g_{b_i} / b_{ik} \right)} \quad (4-52)$$

#### \*4.3.6 对方向距离函数模型的扩展

前面介绍的所有方向距离函数模型, 投入和产出的方向向量是在同一个向量空间中。如果将投入、好产出和坏产出的方向向量分离, 则模型表示为

$$\begin{aligned} \theta_k &= \frac{1 - \frac{1}{\sum w_i^I} \sum_{i=1}^m w_i^I \alpha g_{x_i} / x_{ik}}{1 + \frac{1}{\omega^G + \omega^B} \left( \omega^G \frac{1}{\sum w_r^G} \sum_{r=1}^q w_r^G \beta g_{y_r} / y_{rk} + \omega^B \frac{1}{\sum w_r^B} \sum_{i=1}^p w_r^B \gamma g_{b_i} / b_{ik} \right)} \\ \text{s. t. } X\lambda + \alpha g_x &\leq x_k \\ Y\lambda - \beta g_y &\geq y_k \\ B\lambda - \gamma g_b &\leq b_k \\ \lambda &\geq 0 \end{aligned} \quad (4-53)$$

为了便于理解分离投入、好产出和坏产出向量之后的意义, 来看一下一种简单的形式, 即方向距离函数与径向模型等价时的特例

$$\theta_k = \frac{1 - \alpha}{1 + 0.5\beta + 0.5\gamma}$$

$$\text{s. t. } X\lambda + \alpha x_k \leq x_k$$

$$Y\lambda - \beta y_k \geq y_k$$

$$B\lambda + \gamma b_k \leq b_k$$

$$\lambda \geq 0 \quad (4-54)$$

在模型(4-54)中,投入和产出以相对独立的方式进行等比例改进。在最优解中,投入和产出的改进比例可以不等。

### 4.3.7 MaxDEA 求解方向距离函数模型示例

(1) 方向距离函数模型示例。

以表2-6的数据为例,来说明 MaxDEA 求解一般方向距离函数模型的过程。首先,在包络模型的 Distance 设置界面,选择 Directional Distance (见图4-27)。

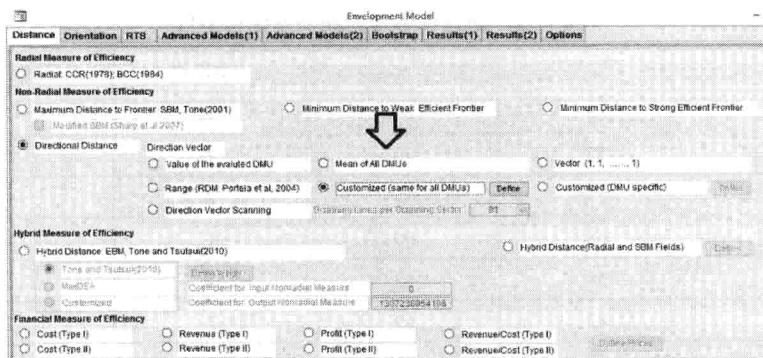


图4-27 设置 Distance

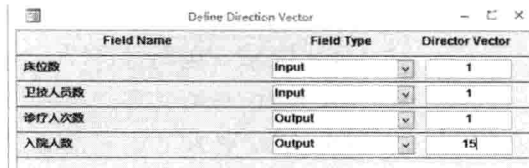
在方向距离函数模型中,MaxDEA 提供的方向向量类型包括以下几种。

- 1) Value of the evaluated DMU, 这一选项就是前文介绍的方向距离函数的几种与径向模型等价的特例,方向向量取被评价 DMU 的投入和产出数值。
- 2) Mean of all DMUs, 投入和产出方向向量值取所有 DMU 该指标的平均值(均数)。
- 3) Vector (1, 1, ..., 1), 方向向量值取 1。
- 4) Range, 是由 Portela 等人(2004)提出的一种采用被评价 DMU 最大可能的改进值作为方向向量值的方法(Range Directional Model, RDM), 即

$$g_{xk} = x_k - \min(x)$$

$$g_{yk} = \max(y) - y_k$$

5) Customized (same for all DMUs), 自定义方向向量,定义的方向向量用于所有 DMU。点击 Define 按钮,填写各项投入和产出指标的方向向量值,方向向量采用(1, 1, 1, 15),分别填写 1、1、1、15,向量值分别对应床位数、卫技人员数、诊疗人次数和住院人数(见图4-28)。



Field Name	Field Type	Director Vector
床位数	Input	1
卫技人员数	Input	1
诊疗人次数	Output	1
入院人数	Output	15

图 4-28 自定义方向向量

6) Customized (DMU specific), 为每个被评价 DMU 分别定义各自的方向向量值, 即评价不同的 DMU 时, 采用不同的方向向量。要采用这种方向向量, 必须在导入数据前, 在数据中增加各个投入和产出指标的方向向量变量 (示例见表 4-26), 有多少投入产出指标就相应地增加多少列向量值。这些增加的指标在数据定义时, 保持 “Not defined” 不变, 然后在 Define 界面, 指定各个投入产出的向量变量 (见图 4-29)。

表 4-26 数据中增加方向向量指标示例

DMU	$x$	$y$	$x$ 向量值	$y$ 向量值
A	88	81	1	11
B	57	70	2	10
C	57	75	2	11
D	68	90	1	10
E	58	83	1	11
F	82	69	2	10
G	57	73	2	11

Field No	Field Name	Field Type	Active	Desc
1	地区	DMU Name	<input checked="" type="checkbox"/>	
2	床位数	Input	<input checked="" type="checkbox"/>	
3	卫技人员数	Input	<input checked="" type="checkbox"/>	
4	诊疗人次数	Output	<input checked="" type="checkbox"/>	
5	入院人数	Output	<input checked="" type="checkbox"/>	
6	向量值_床位数	Not defined	<input checked="" type="checkbox"/>	
7	向量值_卫技人员数	Not defined	<input checked="" type="checkbox"/>	
8	向量值_诊疗人次数	Not defined	<input checked="" type="checkbox"/>	
9	向量值_入院人数	Not defined	<input checked="" type="checkbox"/>	

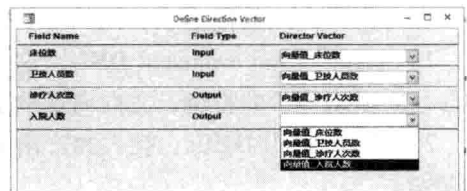


图 4-29 指定各投入产出的方向向量

7) Direction Vector Scanning, 方向向量扫描, 详见下一节的介绍。

前面 5 种方向向量类型均可以通过第 6 种方向向量类型来实现。例如, 在导入数据前, 先计算好各项投入和产出各自的最大可能的改进值, 作为各自的方向向量变量加入原始数据中, 然后选择第 6 种方向向量类型与直接选择第 4 种方向向量类型, 是等价的。

此示例选择第 5 种方向向量类型, 并设置方向向量为 (1, 1, 1, 15)。然后在 Orientation 界面, 选择模型导向, 在 RTS 界面选择规模收益类型。



1) 如果选择非导向模型, 可进一步选择是否分离投入和产出向量: 勾选  $\alpha = \beta$ , 投入和产出向量在同一向量空间; 取消  $\alpha = \beta$ , 投入和产出向量分离。

2) 选择投入导向与选择非导向并通过自定义将产出的方向向量值设置为 0 等价。选择投入导向时, 在模型中用不到产出的方向向量值, 因此产出的方向向量值不影响结果。

3) 选择产出导向与选择非导向并通过自定义将投入的方向向量值设置为 0 等价。选择产出导向时, 在模型中用不到投入的方向向量值, 因此投入的方向向量值不影响结果。

此示例模型 Orientation 选择 Output-oriented (产出导向); RTS 选择 CRS。

如果要设置各项指标的权重, 则在 Advanced Models (1) 界面, 勾选 Preference (Weighted), 并点击 Define 按钮, 设置指标权重 (见图 4-30)。投入导向的模型, 产出指标的权重没有作用; 产出导向的模型, 投入指标的权重没有作用。此示例模型不设置指标权重, 相当于所有指标的权重相同。

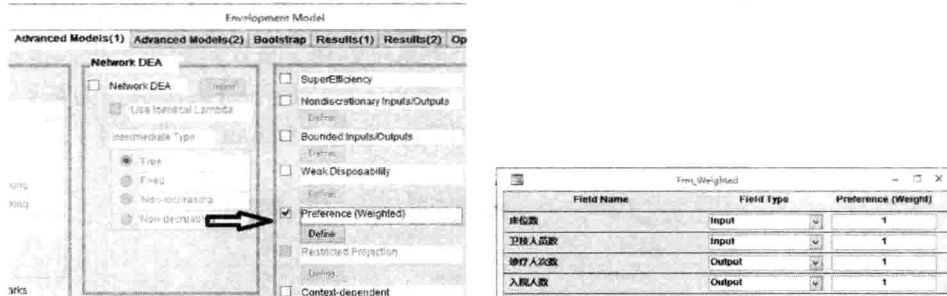


图 4-30 设置各指标的权重

如果需要在结果中显示  $\alpha^*$ 、 $\beta^*$  和  $\gamma^*$ , 需要在 Result (1) 界面, 勾选相应选项 (见图 4-31)。

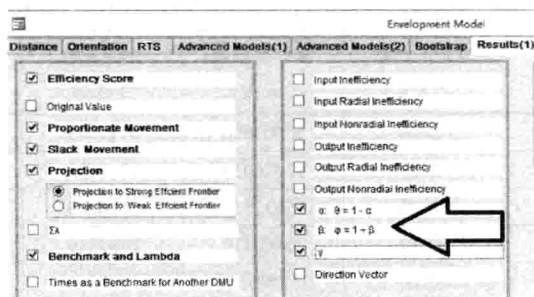


图 4-31 显示  $\alpha^*$ 、 $\beta^*$  和  $\gamma^*$  的值

分析结果见表 4-27。当方向向量值均大于 0 时, 方向距离函数模型与径向模型判断被评价 DMU 是否为 (弱) 有效状态等价, 但无效 DMU 的效率值及其

参考标杆不同。方向距离函数模型的效率值与径向模型的效率值之间不存在固定的数量关系,在本示例模型中,大部分 DMU 的方向距离函数模型的效率值较径向模型高。

表 4-27 径向模型与方向距离函数模型分析结果比较 (产出导向 CRS)

地 区	方向距离函数模型		径向模型	
	效率值	参考标杆	效率值	参考标杆
安 徽	0.9712	福建 (0.673719); 新疆 (0.825137)	0.9442	福建 (0.673719); 新疆 (0.825137)
北 京	0.7960	福建 (0.005235); 广东 (0.354095)	0.9174	上海 (1.000548)
福 建	1.0000	福建 (1.000000)	1.0000	福建 (1.000000)

(2) 包含非期望产出的方向距离函数模型示例。

表 4-28 为 2010 年各省 (市、自治区) 医院的床位数、卫技人员数、诊疗人次数、出院人数和出入院诊断不符人次数。将床位数和卫技人员数作为投入指标,将诊疗人次数和出院人数作为好产出指标,将出入院诊断不符人次数作为坏产出指标。坏产出指标在定义数据时与好产出相同,均为“Output”(见图 4-32)。

Field No	Field Name	Field Type	Active	Df
1	地区	DMU Name	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2	床位数	input	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3	卫技人员数	input	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4	诊疗人次数	Output	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5	出院人数	Output	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6	出入院诊断不符人次数	Output	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

图 4-32 定义好产出和坏产出

表 4-28 各地区医院部分投入产出与质量指标 (2010 年)

地 区	床位数 (个)	卫技人员数 (人)	诊疗人次数 (人次)	入院人数 (人)	出入院诊断不符人次数 (人次)
安 徽	123427	123974	56090890	3717343	26021
北 京	85775	121424	93376029	1708495	8542
福 建	80896	82726	65632537	2710285	51495
甘 肃	63773	50119	26462412	1484519	25237
广 东	224114	262214	257480147	7087548	42525
广 西	88913	97675	60570961	2910575	43659
贵 州	69343	61260	25368195	2089306	37608
海 南	18807	23324	11650197	528349	12152
河 北	172956	175243	74748831	5099328	66291
河 南	220974	212847	103470565	6203957	111671

续表

地 区	床位数 (个)	卫技人员数 (人)	诊疗人次数 (人次)	入院人数 (人)	出入院诊断不符人次数 (人次)
黑龙江	123928	122477	45083824	2721994	24498
湖 北	135006	138213	77101473	4232467	76184
湖 南	150141	141921	58694543	4684786	84326
吉 林	89341	83764	35533691	1994079	23929
江 苏	195340	195589	150420724	5577559	33465
江 西	77805	85995	42630399	2524640	37870
辽 宁	160894	152822	66522624	3640376	32763
内蒙古	67016	69118	28274251	1566913	29771
宁 夏	20258	20479	11314914	555371	3888
青 海	16226	15519	8135941	406122	6092
山 东	255764	258707	123570567	7533675	75337
山 西	108260	115090	36443520	2132218	17058
陕 西	104819	111967	49244614	2849597	31346
上 海	84825	93566	104898763	2114263	10571
四 川	184828	172381	98207483	5557053	83356
天 津	40387	50897	43334154	933063	9331
西 藏	5444	5435	3390468	108864	2177
新 疆	89871	78206	34160068	2644559	29090
云 南	112493	83687	57102579	3316600	89548
浙 江	150986	171461	156681377	4345922	65189
重 庆	64827	60294	34036573	1799571	23394

当存在非期望产出时，Distance、Orientation、RTS 和指标权重的设置方法与一般方向距离函数模型相同。

需要注意的是，选择第1~4种方向向量类型时，软件会自动将非期望产出对应的方向向量值取负数；如果选择自定义方向向量（第5种和第6种方向向量类型），则需要用户自己决定非期望产出的方向向量值采用正数还是负数。采用正数还是负数及其数值的大小，取决于决策目标。通常情况下，改进目标是减少坏产出，应将非期望产出的方向向量值设置为负数。如果决策目标是增加坏产出，则在软件中只能通过自定义方向向量来实现。

此示例模型采用第1种方向向量类型，即  $g_x = x_k$ ， $g_y = y_k$ ， $g_b = -b_k$ ；Orientation 选择非导向（non-oriented）并且  $\alpha = \beta$ ；RTS 选择 VRS。

除此之外，在 Advanced Model (1) 界面，勾选 Undesirable Outputs，可选择是否分离好产出和坏产出向量：勾选  $\beta = \gamma$ ，好产出和坏产出向量在同一向量空

间；取消  $\beta = \gamma$ ，好产出和坏产出向量分离（见图 4-33）。

此示例模型采用  $\beta = \gamma$ ；好产出与坏产出的权重（Weight of good Outputs,  $w_g$ ；Weight of bad outputs,  $w_b$ ）设置为 2:1。不设置各指标的权重。

点击 Define Bad Outputs，打开定义坏产出的界面，勾选所有坏产出（见图 4-34）。

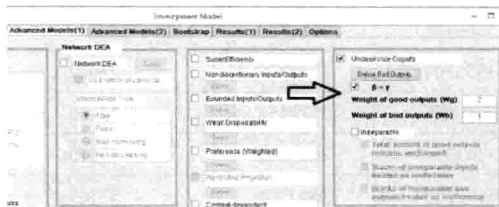


图 4-33 设置是否分离好产出和坏产出向量

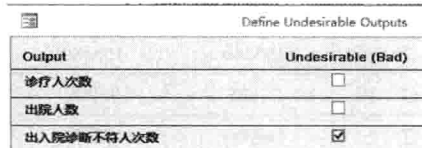


图 4-34 定义坏产出

如果通过自定义方向向量将一个产出指标的方向向量值设置为负数，但没有将其定义为坏产出，则软件实际计算的是错误的模型（4-28）。

如果将非期望产出设置为弱可处置，则在 Advanced Model (1) 界面勾选 Weak Disposability，并点击 Define 按钮，勾选弱可处置的非期望产出。

此示例模型分别设置非期望产出为强可处置（不勾选 Weak Disposability）和弱可处置，对其结果进行比较<sup>①</sup>（见图 4-35）。

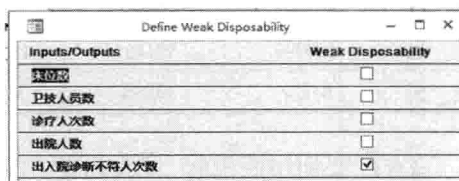
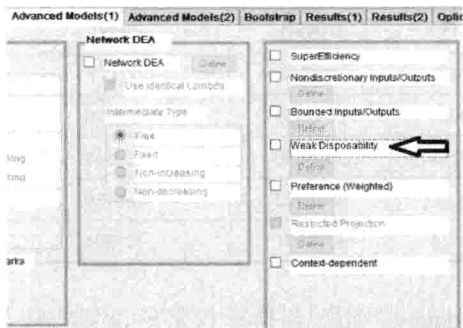


图 4-35 设置弱可处置

分析结果见表 4-29。由于坏产出弱可处置模型（4-32）的最优解是强可处置模型（4-30）的一个可行解，因此，弱可处置模型的效率值大于或等于强可处置模型的效率值。在本示例中，有 5 个 DMU 的弱可处置模型的效率值大于强可处置模型，其中有 3 个 DMU（河南、湖北、浙江）在强可处置模型中为无效，而在弱可处置模型中为有效。

<sup>①</sup> 本书作者建议将非期望产出设置为强可处置，原因见前文分析。

表4-29 包含非期望产出的方向距离函数模型分析结果

地区	强可处置模型		弱可处置模型	
	效率值	$\beta$	效率值	$\beta$
广西	0.9984	0.0008	0.9984	0.0008
贵州	0.9902	0.0049	0.9902	0.0049
海南	0.9323	0.0350	0.9885	0.0058
河北	0.9543	0.0234	0.9543	0.0234
河南	0.9508	0.0252	1.0000	0.0000

## \* 4.4 方向向量扫描模型

### 4.4.1 方向向量扫描模型的定义和功能

单位向量是指长度为1的向量。在欧氏空间中，任何非零向量 $u$ 的正规化向量 $\hat{u}$ 就是平行于 $u$ 的单位向量。

$$\hat{u} = \frac{u}{\|u\|} \quad (4-55)$$

式(4-47)定义的方向距离函数模型效率值仅与方向向量的方向有关，而与方向向量的长度无关。在方向距离函数模型中，当方向向量用其正规化向量替换时，效率值不变，因此所有单位向量的集合实际上涵盖了方向距离函数模型的所有方向向量。

将欧氏空间的非负象限中的所有单位向量用集合 $\hat{U}$ 表示<sup>①</sup>。在欧氏空间中，集合 $\hat{U}$ 与以原点为圆心，非负象限内半径为1的多维球面对应。例如，在二维平面中，集合 $\hat{U}$ 表示为以原点为圆心半径为1的1/4圆周，在三维空间中，集合 $\hat{U}$ 表示为以原点为圆心半径为1的1/8球面。集合 $\hat{U}$ 中的元素（单位向量 $\hat{u}$ ）表示为 $\hat{u} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ ， $p$ 为向量 $\hat{u}$ 的维度，则

$$\sum_{i=1}^p u_i^2 = 1 \quad (4-56)$$

在欧氏空间中，可以通过类似扫描的方式来均匀地获得集合 $\hat{U}$ 中的单位向量。所谓均匀是指如果将单位向量表示为半径为1的多维球面上的点，所获得的所有单位向量均匀分布在多维球面上。通过方向向量扫描从集合 $\hat{U}$ 所获得的单位向量的集合记为方向向量集合 $\hat{E}$ 。

将采用无限集合 $\hat{U}$ 中所有单位向量所建立的方向距离函数模型用集合 $M$ 表示，集合 $M$ 也是无限集合。

方向向量扫描模型的定义：将采用集合 $\hat{E}$ 中所有单位向量作为方向向量建立的方向距离函数模型的集合，定义为方向向量扫描模型（Directional Vector Scan-

① 限定在非负象限，即限定 $\hat{U}$ 的所有元素为非负值，目的是便于DEA模型的表达。

ning Model, DVS), 记为  $D$ 。单位向量集合  $\hat{E}$  和方向距离函数模型集合  $D$  均为有限集合。将方向向量的维度称为方向向量扫描模型的维度。例如, 当方向向量为二维时, 称为二维方向向量扫描模型, 用  $M^2$  表示。具有 2 项投入的投入导向模型、具有 2 项产出的产出导向模型及具有 1 项投入、1 项产出的非导向模型均为二维方向向量扫描模型。

$\hat{E} \subset \hat{U}$ , 当扫描间隔无限小时,  $\hat{E}$  无限逼近  $\hat{U}$ 。 $D \subset M$ , 当扫描间隔无限小时,  $D$  无限逼近  $M$ 。在实际应用中, 当扫描间隔足够小时, 可以用有限集合  $D$  代表无限集合  $M$ 。

方向向量扫描模型元素的数量等于扫描中使用的方向向量的数量, 也就是扫描线的数量, 其多少取决于方向向量的维度和扫描间隔 (间隔角度记为  $\theta$ ) 的大小。扫描维数为  $n$ , 间隔角度为  $\theta$  的方向向量扫描模型记为  $D^n$ , 其方向向量集合记为  $\hat{E}^n$ 。

方向向量扫描模型中的每一个元素均可作为一个独立的方向距离函数模型。可以把径向和非径向模型看做方向向量扫描模型中的特定元素。

方向向量扫描模型具有以下功能:

一是通过扫描可以获得每个被评价 DMU 的参考前沿上的投影点 (扫描间隔足够小时, 可认为获得了所有投影点), 以此为基础, 被评价 DMU 可以根据自身实际情况选择最合适的目标值 (投影值)。

二是可以计算所有扫描结果的平均效率值, 作为对被评价 DMU 效率状态的评价。

三是通过方向向量扫描方法, 可以建立前沿 (无差异) 曲线 (投入无差异曲线/面和产出无差异曲线/面)。

#### 4.4.2 方向向量扫描的实现方法

实现方向向量扫描模型的方法是在扫描维度和扫描间隔确定的条件下, 求解方向向量集  $\hat{E}$  中所有方向向量的过程。先从最简单的二维方向向量扫描模型开始。以具有 2 项投入 1 项产出的投入导向模型为例, 图 4-36 演示了二维方向向量扫描模型的基本原理。 $GV$  代表方向距离函数模型的向量, 当  $V$  点在  $1/4$  圆周 (圆弧  $PQ$ ) 以间隔角度  $\theta$  移动时, 即获得二维方向向量扫描模型, 记为  $D^2$ 。

扫描间隔  $\theta$ 、方向向量的数量  $\mu$ 、第  $i$  个方向向量 (以横坐标为起点) 与横坐标之间的夹角  $\rho$  (用弧度表示) 及方向向量终点  $V$  的坐标值 ( $v_1, v_2$ ) 之间的关系为:

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{\pi}{2(\mu - 1)} \\ \rho &= (i - 1) \times \frac{\pi}{2(\mu - 1)} \\ v_1 &= \cos(\rho) \\ v_2 &= \sqrt{1 - \cos^2(\rho)} = \sin(\rho)\end{aligned}\quad (4-57)$$

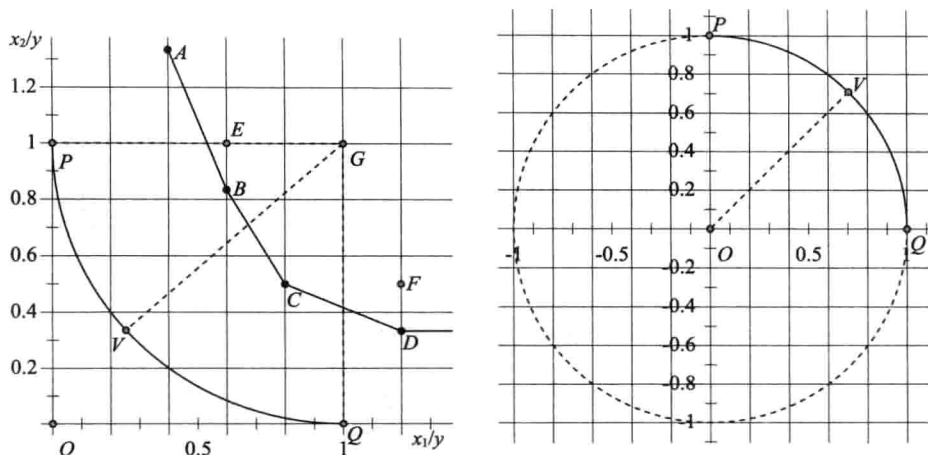


图 4-36 二维方向向量扫描模型

图 4-37 显示了当间隔角度为  $\pi/18$  ( $10^\circ$ ) 时的方向向量集, 共有 10 个方向向量, 之间的夹角为  $\pi/18$  ( $10^\circ$ )。第一个方向向量与横坐标重合, 最后一个方向向量与纵坐标重合。当间隔角度为  $\pi/2$  ( $90^\circ$ ) 时, 共有 2 个方向向量, 分别与两个坐标轴重合。

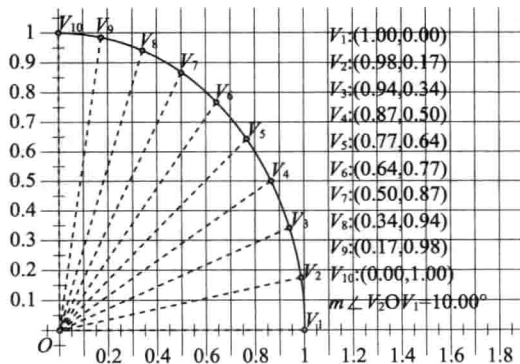


图 4-37 二维方向向量集的实现

三维方向向量扫描模型较二维方向向量扫描模型复杂。三维方向向量集  $\hat{U}^3$  在三维空间中为以原点为圆心, 半径为 1 的  $1/8$  球面, 图 4-38 显示了不同角度的  $1/8$  球面透视图。

当三维方向向量的元素  $v_1$  为固定值时 ( $0 \leq v_1 \leq 1$ ), 对  $v_2$  和  $v_3$  的扫描变为二维平面内的扫描问题, 可以通过上面的方法来实现。当  $v_1$  从 0 开始以固定间隔逐渐增加时, 所得到的由  $v_1$ 、 $v_2$  和  $v_3$  构成的单位向量集即为三维方向向量集  $\hat{E}^3$ 。特别的, 当  $v_1 = 0$  时,  $v_2$  和  $v_3$  构成的二维方向向量集与二维平面中的二维方向向量集  $\hat{U}^2$  相同。

图 4-39 演示的是当  $v_1$  取  $x$  轴上 A 点时形成的扫描平面  $OPQ$ , 夹角  $POQ$  小

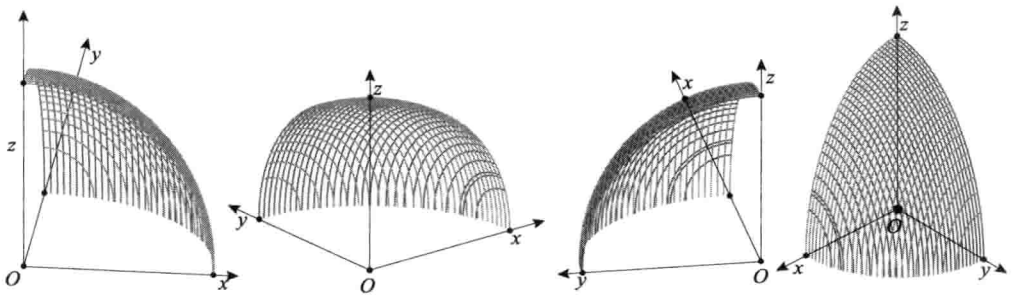


图 4-38 三维方向向量集在欧氏空间中的实现

于  $\pi/2$ 。扫描生成的方向向量为  $1/8$  球面上的曲线  $PQ$ 。为了理解上的方便，可以把  $v_1$  取不同数值时在球面上形成的曲线看做地球仪上的纬度线（ $1/8$  球体取东经  $0^\circ \sim 90^\circ$  的北半球），图 4-40 显示的是  $v_1$  取 0.5 时形成的北纬  $30^\circ$  线。

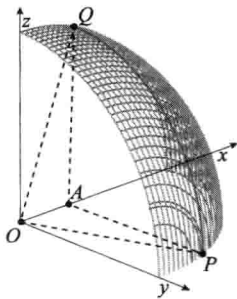
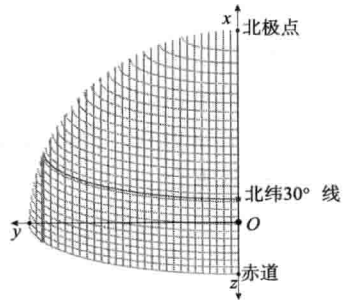
图 4-39 固定  $v_1$ （坐标轴  $x$  的值）时的扫描平面示意图

图 4-40 三维方向向量在地球仪中的示意图

从上述思路出发，通过二级嵌套循环可以实现分布均匀的三维方向向量集  $\hat{E}^3$ 。

#### 方法一

‘一级循环

For  $i=0$  to  $\frac{\pi}{(2\theta)}$  ‘(循环次数为单个平面的最大扫描线数)

$$v_1 = \sin(i \times \theta)$$

‘二级循环

For  $j=0$  to  $\frac{\pi}{(2\theta)}$  ‘(最大循环次数为单个平面的最大扫描线数)

If  $v_1^2 + \sin(j \times \theta)^2 > 1$  Then Exit For ‘(二级循环退出条件)

$$v_2 = \sin(j \times \theta)$$

$$v_3 = \sqrt{1 - v_1^2 - v_2^2}$$

Next  $j$

Next  $i$

‘ $n$  维方向向量集  $\hat{E}^n$  可以通过  $n-1$  级循环实现。



‘一级循环

For  $i=0$  to  $\frac{\pi}{(2\theta)}$  ‘(循环次数为单个平面的最大扫描线数)

$$v_1 = \sin(i \times \theta)$$

‘二级循环

For  $j=0$  to  $\frac{\pi}{(2\theta)}$  ‘(最大循环次数为单个平面的最大扫描线数)

If  $v_1^2 + \sin(j \times \theta)^2 > 1$  then Exit For ‘(二级循环退出条件)

$$v_2 = \sin(j \times \theta)$$

.....

‘ $n-1$ 级循环

For  $k=0$  to  $\frac{\pi}{(2\theta)}$  ‘(最大循环次数为单个平面的最大扫描线数)

If  $\sum_{s=1}^{n-2} v_s^2 + \sin(k \times \theta)^2 > 1$  then Exit For ‘( $n-1$ 级循环退出条件)

$$v_{n-1} = \sin(k \times \theta)$$

$$v_n = \sqrt{1 - \sum_{d=1}^{n-1} v_d^2}$$

Next  $k$

.....

.....

Next  $j$

Next  $i$

图4-41以扫描间隔 $22.5^\circ$ 为例说明了方法一生成的三维方向向量在地球仪平面上的分布规律。

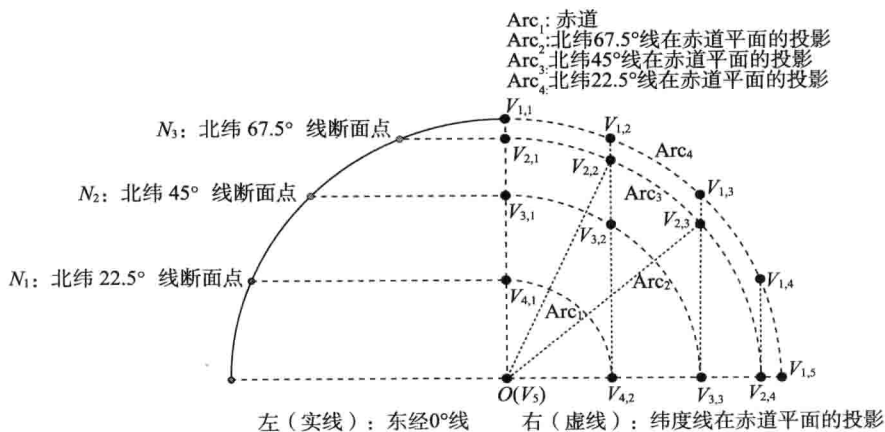


图4-41 方法一生成的三维方向向量在地球仪上的分布情况

(1) 扫描线间隔相等, 即相邻两条纬度线(扫描线)与球心形成的夹角等于扫描间隔 $\theta$ 。例如, 扫描间隔( $\theta$ )为 $22.5^\circ$ 时, 形成北纬 $0^\circ$ (赤道)、 $22.5^\circ$ 、

45°、67.5°和90°（北极点）5条扫描纬度线（点）。

(2) 处于同一纬度上的点之间的距离不等。图4-41右侧为各纬度线在赤道平面上的投影。当扫描间隔为22.5°时，在球面上形成共15个扫描点，除赤道线外，同一纬度线的各点之间的距离不等。同一扫描线上的相邻两个扫描点（最后两个点除外）与球心形成的夹角不等于扫描间隔 $\theta$ 。

(3) 不满足在球面上的任意两个相邻的扫描点与球心形成的夹角等于扫描间隔 $\theta$ 。

以北纬67.5°线为例，共有4个点，自上而下分别为 $V_{2,1}$ 、 $V_{2,2}$ 、 $V_{2,3}$ 、 $V_{2,4}$ 。赤道线（ $V_{1,1}V_{1,5}$ ）的长度为 $\pi/4$ ，北纬67.5°线（ $V_{2,1}V_{2,4}$ ）长度为

$$\angle V_{2,1}OV_{2,2} = \sin^{-1}(\sin(\theta)/\cos(\theta)) \quad (4-58)$$

四个点之间的间隔角度分别为

$$\begin{aligned} \angle V_{2,1}OV_{2,2} &= \sin^{-1}(OV_{4,2}/OV_{2,2}) \\ &= \sin^{-1}(\sin(\theta)/\sqrt{1-\sin^2(\theta)}) \\ &= 24.47^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle V_{2,2}OV_{2,3} &= \angle V_{2,1}OV_{2,3} - \angle V_{2,1}OV_{2,2} \\ &= \sin^{-1}(OV_{3,3}/OV_{2,3}) - \sin^{-1}(OV_{4,2}/OV_{2,2}) \\ &= \sin^{-1}(\sin(2\theta)/\sqrt{1-\sin^2(\theta)}) - \sin^{-1}(\sin(\theta)/\sqrt{1-\sin^2(\theta)}) \\ &= 25.47^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle V_{2,3}OV_{2,4} &= \angle V_{2,1}OV_{2,4} - \angle V_{2,1}OV_{2,3} \\ &= \sin^{-1}(OV_{2,4}/OV_{2,4}) - \sin^{-1}(OV_{3,3}/OV_{2,3}) \\ &= 1 - \sin^{-1}(\sin(2\theta)/\sqrt{1-\sin^2(\theta)}) \\ &= 40.06^\circ \end{aligned}$$

三维方向向量集的第*i*条扫描线上的第*j*个点与第*j*-1个点之间的夹角为

$$\angle V_{i,j}OV_{i,j-1} = \sin^{-1}(\sin(j \times \theta)/\sqrt{1-\sin^2(i \times \theta)}) - \sin^{-1}(\sin((j-1) \times \theta)/\sqrt{1-\sin^2(i \times \theta)})$$

$$i \times \theta < \frac{\pi}{2},$$

$$j \times \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, \frac{\pi}{2\theta}$$

$$j = 1, 2, 3, \dots, \frac{\pi}{2\theta} \quad (4-59)$$

*n*维方向向量集的第*i*条扫描线上的第*j*个点与第*j*-1个点之间的夹角为

$$\angle V_{i,j}OV_{i,j-1} = \sin^{-1}\left(\sin(j \times \theta)/\sqrt{1 - \sum_{d=1}^n \sin^2(i_d \times \theta)}\right) -$$

$$\sin^{-1}\left(\sin((j-1)\times\theta)/\sqrt{1-\sum_{d=1}^n\sin^2(i_d\times\theta)}\right)$$

$$\sum_{d=1}^n\sin^2(i_d\times\theta)<1$$

$$j\times\theta<\frac{\pi}{2}$$

$$i=0,1,2,\dots,\frac{\pi}{2\theta}$$

$$j=1,2,3,\dots,\frac{\pi}{2\theta} \quad (4-60)$$

方法一得到的三维方向向量集的总数量为

$$\frac{\left(\frac{\pi}{2\theta}+1\right)\times\left(\frac{\pi}{2\theta}+2\right)}{2} \quad (4-61)$$

### 方法二

在方法一的基础上,将同一纬度线上相邻的两个扫描点在纬度线上的距离调整为与相邻纬度线在球心圆上的距离相等。

‘一级循环

For  $i=0$  to  $\frac{\pi}{(2\theta)}$

$$v_1 = \sin(i \times \theta)$$

‘二级循环

For  $j=0$  to  $\frac{\pi}{(2\theta)}$

If  $j \times \theta / \sqrt{1 - \sin^2(i \times \theta)} > \frac{\pi}{2}$  Then  $v_2 = \sqrt{1 - v_1^2}$  : Exit For

If  $v_1^2 + \left(\sqrt{1 - \sin^2(i \times \theta)} \times \sin(j \times \theta / \sqrt{1 - \sin^2(i \times \theta)})\right)^2 > 1$  Then Exit For

$$v_2 = \sqrt{1 - \sin^2(i \times \theta)} \times \sin(j \times \theta / \sqrt{1 - \sin^2(i \times \theta)})$$

$$v_3 = \sqrt{1 - v_1^2 - v_2^2}$$

Next  $j$

Next  $i$

$n$  维方向向量集  $\hat{E}^n$  可以通过  $n-1$  级循环实现。

‘一级循环

For  $i=0$  to  $\frac{\pi}{(2\theta)}$

$$v_1 = \sin(i \times \theta)$$

‘二级循环

For  $j=0$  to  $\frac{\pi}{(2\theta)}$

If  $j \times \theta / \sqrt{1 - \sin^2(i \times \theta)} > \frac{\pi}{2}$  Then  $v_2 = \sqrt{1 - v_1^2}$  : Exit For

If  $v_1^2 + \left( \sqrt{1 - \sin^2(i \times \theta)} \times \sin(j \times \theta / \sqrt{1 - \sin^2(i \times \theta)}) \right)^2 > 1$  Then Exit For  
 $v_2 = \sqrt{1 - \sin^2(i \times \theta)} \times \sin(j \times \theta / \sqrt{1 - \sin^2(i \times \theta)})$   
 .....  
 ‘n-1 级循环  
 For  $k=0$  to  $\frac{\pi}{(2\theta)}$   
 If  $j \times \theta / \sqrt{1 - \sum_{d=1}^{n-2} \sin^2(i_d \times \theta)} > \frac{\pi}{2}$  Then  $v_{n-1} = \sqrt{1 - \sum_{d=1}^{n-2} v_d^2}$  : Exit For  
 If  $\sum_{s=1}^{n-2} v_d^2 + \left( \sqrt{1 - \sum_{d=1}^{n-2} \sin^2(i_d \times \theta)} \times \sin(j \times \theta / \sqrt{1 - \sum_{d=1}^{n-2} \sin^2(i_d \times \theta)}) \right)^2 > 1$   
 Then Exit For  
 $v_{n-1} = \sqrt{1 - \sum_{d=1}^{n-2} \sin^2(i_d \times \theta)} \times \sin(j \times \theta / \sqrt{1 - \sum_{d=1}^{n-2} \sin^2(i_d \times \theta)})$   
 $v_n = \sqrt{1 - \sum_{d=1}^{n-1} v_d^2}$   
 Next  $k$   
 .....  
 Next  $j$   
 Next  $i$

方法二生成的三维方向向量在地球仪平面上的分布规律如下。

(1) 扫描线间隔相等，即相邻两条纬度线（扫描线）与球心形成的夹角等于扫描间隔  $\theta$ 。例如，扫描间隔  $\theta$  为  $22.5^\circ$  时，形成北纬  $0^\circ$ （赤道）、 $22.5^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $67.5^\circ$  和  $90^\circ$ （北极点）5 条扫描纬度线（点）。

(2) 同一扫描线上的相邻两个扫描点（最后两个点除外）在纬度线上的距离与相邻两条纬度线在球心圆上的距离相等。但是同一扫描线上的相邻两个扫描点（最后两个点除外）与球心形成的夹角不等于扫描间隔  $\theta$ 。

(3) 不满足在球面上的任意两个相邻的扫描点与球心形成的夹角等于扫描间隔  $\theta$ 。

所以说，方法二生成的方向向量仍然不能满足均匀分布的要求。因为处于不同纬度线上的相邻两点在球心圆上的距离并不等于相邻两条纬度线在球心圆上的距离，处于不同纬度线上的相邻两点在球心圆上的距离也互不相等。

图 4-42 显示了方法二生成的三维方向向量在地球仪上的分布情况，与方法一相比，方法 2 在 3 条纬度线上分别增加了一个扫描点，在每条纬度线上最后两个点之间的球面距离较小。

### 方法三

在方法一的基础上，将同一纬度线上相邻的两个扫描点在球心圆上的距离调整为与相邻纬度线在球心圆上的距离相等。图 4-43 显示了地球仪上两点与球心的夹角和与纬度圆心的夹角之间的关系，通过这种关系可以将同一纬度线上相邻

的两个扫描点在球心圆上的距离调整为与相邻纬度线在球心圆上的距离相等。

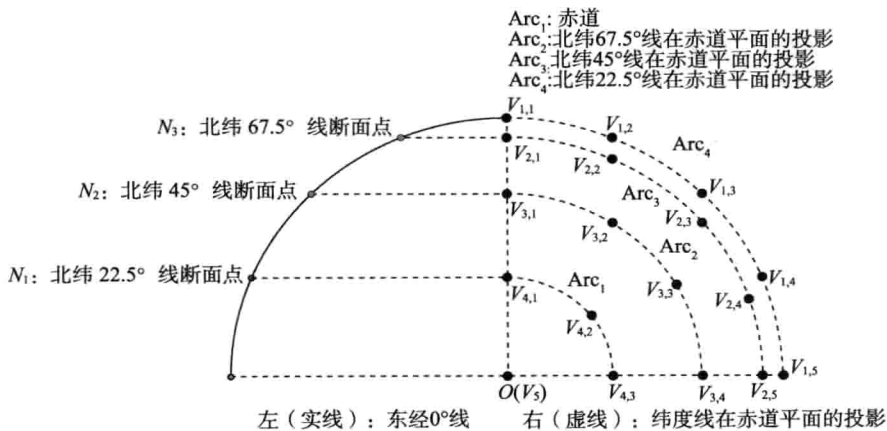


图 4-42 方法二生成的三维方向向量在地球仪上的分布情况

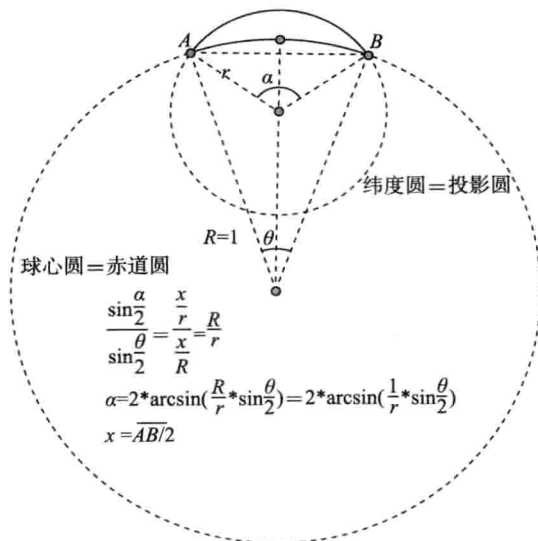


图 4-43 地球仪上两点与球心的夹角和与纬度圆心的夹角之间的关系

‘一级循环

$$\text{For } i=0 \text{ to } \frac{\pi}{(2\theta)}$$

$$v_1 = \sin(i \times \theta)$$

‘二级循环

$$\text{For } j=0 \text{ to } \frac{\pi}{(2\theta)}$$

$$\text{If } j \times \theta / \sqrt{1 - \sin^2(i \times \theta)} > \frac{\pi}{2} \text{ Then } v_2 = \sqrt{1 - v_1^2} : \text{Exit For}$$

$$\text{If } v_1^2 + \left( \sqrt{1 - \sin^2(i \times \theta)} \times \sin(j \times \theta / \sqrt{1 - \sin^2(i \times \theta)}) \right)^2 > 1 \text{ Then Exit For}$$

$$v_2 = \sqrt{1 - \sin^2(i \times \theta)} \times \sin(2\sin^{-1}(\sin(j \times \theta/2) / \sqrt{1 - \sin^2(i \times \theta)}))$$

$$v_3 = \sqrt{1 - v_1^2 - v_2^2}$$

Next  $j$

Next  $i$

$n$  维方向向量集  $\hat{E}^n$  可以通过  $n-1$  级循环实现。

‘一级循环

For  $i=0$  to  $\frac{\pi}{(2\theta)}$

$$v_1 = \sin(i \times \theta)$$

‘二级循环

For  $j=0$  to  $\frac{\pi}{(2\theta)}$

If  $j \times \theta / \sqrt{1 - \sin^2(i \times \theta)} > \frac{\pi}{2}$  Then  $v_2 = \sqrt{1 - v_1^2}$  : Exit For

If  $v_1^2 + (\sqrt{1 - \sin^2(i \times \theta)} \times \sin(j \times \theta / \sqrt{1 - \sin^2(i \times \theta)}))^2 > 1$  Then Exit For

$$v_2 = \sqrt{1 - \sin^2(i \times \theta)} \times \sin(2\sin^{-1}(\sin(j \times \theta/2) / \sqrt{1 - \sin^2(i \times \theta)}))$$

.....

‘ $n-1$  级循环

For  $k=0$  to  $\frac{\pi}{(2\theta)}$

If  $j \times \theta / \sqrt{1 - \sum_{d=1}^{n-2} \sin^2(i_d \times \theta)} > \frac{\pi}{2}$  Then  $v_{n-1} = \sqrt{1 - \sum_{d=1}^{n-2} v_d^2}$  : Exit For

If  $\sum_{s=1}^{n-2} v_s^2 + \left( \sqrt{1 - \sum_{d=1}^{n-2} \sin^2(i_d \times \theta)} \times \sin(j \times \theta / \sqrt{1 - \sum_{d=1}^{n-2} \sin^2(i_d \times \theta)}) \right)^2 > 1$

Then Exit For

$$v_{n-1} = \sqrt{1 - \sum_{d=1}^{n-2} \sin^2(i_d \times \theta)} \times \sin\left(j \times \theta / \sqrt{1 - \sum_{d=1}^{n-2} \sin^2(i_d \times \theta)}\right)$$

$$v_n = \sqrt{1 - \sum_{d=1}^{n-1} v_d^2}$$

Next  $k$

.....

Next  $j$

Next  $i$

方法三生成的三维方向向量在地球仪平面上的分布规律如下。

(1) 扫描线间隔相等，即相邻两条纬度线（扫描线）与球心形成的夹角等于扫描间隔  $\theta$ 。例如，扫描间隔  $\theta$  为  $22.5^\circ$  时，形成北纬  $0^\circ$ （赤道）、 $22.5^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $67.5^\circ$  和  $90^\circ$ （北极点）5 条扫描纬度线（点）。

(2) 同一扫描线上的相邻两个扫描点（最后两个点除外）与球心形成的夹角也等于扫描间隔  $\theta$ 。

(3) 仍然无法满足在球面上的任意两个相邻的扫描点与球心形成的夹角等于扫描间隔  $\theta$ ，但其扫描点已近似均匀分布。

表4-30列出了方向向量扫描维度、扫描间隔和扫描线数量的关系。方向向量的数量随着维度的增加呈指数级增长，当维度为6，扫描间隔为  $1.8^\circ$ （在  $90^\circ$  扫描面上有51条扫描线）时，方法三生成的方向向量的数量为1650万。每一个方向向量代表着一个DEA模型的线性规划式。假设每求解一个线性规划式的时间为  $0.01s$ ，所需要的总时间大约为2天。当方向向量数量为100万时，需要的时间约为  $2.8h$ 。另外，每个DEA模型所需要的时间主要由投入产出指标的数量和DMU的数量所决定，当指标数量和DMU数量较多时，求解每个模型所需要的时间会远远超过  $0.01s$ 。

表4-30 方向向量扫描维度、扫描间隔和扫描线数量的关系

维度	扫描间隔	扫描线数量（方法一）	扫描线数量（方法二）	扫描线数量（方法三）
3	$45^\circ$	3	3	3
3	$22.5^\circ$	10	12	12
3	$15^\circ$	21	26	26
3	$11.25^\circ$	36	46	46
3	$9^\circ$	55	69	69
3	$4.5^\circ$	210	266	266
3	$3^\circ$	465	593	593
3	$2.25^\circ$	820	1046	1046
3	$1.8^\circ$	1275	1626	1626
4	$45^\circ$	4	4	4
4	$22.5^\circ$	20	30	30
4	$15^\circ$	56	91	91
4	$11.25^\circ$	126	210	208
4	$9^\circ$	235	382	380
4	$4.5^\circ$	1763	2802	2768
4	$3^\circ$	5871	9167	9053
4	$2.25^\circ$	13813	21389	21127
4	$1.8^\circ$	26918	41376	40822
5	$45^\circ$	5	5	5
5	$22.5^\circ$	36	66	66
5	$15^\circ$	136	278	277
5	$11.25^\circ$	393	814	802
5	$9^\circ$	928	1817	1787
5	$4.5^\circ$	13629	25105	24517
5	$3^\circ$	67832	121063	117971
5	$2.25^\circ$	212048	373216	363526
5	$1.8^\circ$	515163	897523	873584
6	$45^\circ$	6	6	6

续表

维度	扫描间隔	扫描线数量 (方法一)	扫描线数量 (方法二)	扫描线数量 (方法三)
6	22.5°	61	132	132
6	15°	317	769	761
6	11.25°	1148	2827	2768
6	9°	3403	7690	7486
6	4.5°	97706	200083	192842
6	3°	718084	1417889	1361097
6	2.25°	2970357	5768612	5528827
6	1.8°	8968345	17231920	16496431

#### 4.4.3 MaxDEA 求解方向向量扫描模型示例

求解方向向量扫描模型的方法与普通方向距离函数模型基本相同，区别是选择方向向量最后一种类型，即“Direction Vector Scanning”，然后选择扫描间隔（扫描线数量）。扫描间隔以度表示，最大间隔为 90°（每个扫描面内有 2 条扫描线，见图 4-44）。扫描间隔越小，扫描线数量越大。

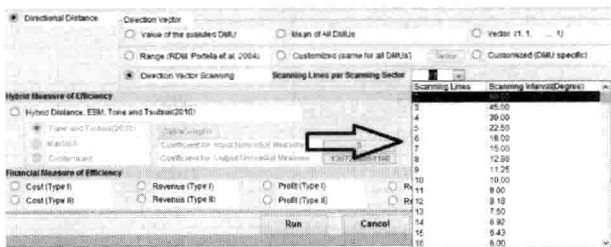


图 4-44 设置扫描间隔

在 Result (1) 界面，勾选 Direction Vector（见图 4-45），在分析结果中会显示每个模型所采用的方向向量，结果指标的名称为“Direction Vector（投入或产出指标名称）”。用户可以将分析结果导入到统计软件中进一步分析。

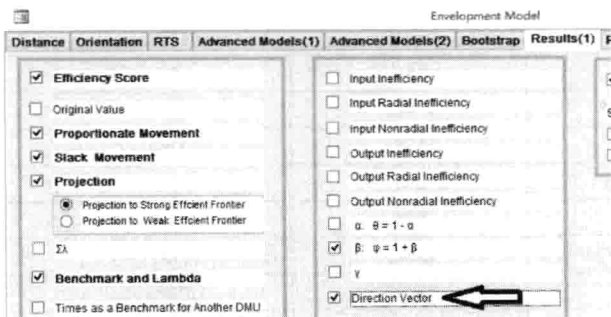


图 4-45 设置方向向量



前面在介绍投影值约束 SBM 模型时,谈到在设置投入或产出指标之间比值的区间时,可以先通过方向向量扫描模型来了解比值可能的取值范围。以表 2-6 的数据为例,通过方向向量扫描模型获得投入(产出)投影值比值的可能范围。选择非导向 CRS 模型,将扫描间隔设置为  $90^\circ$ 。整理后的结果见表 4-31。

表 4-31 通过方向向量扫描模型获得投入(产出)投影值比值的可能范围

地 区	卫技人员数投影值 床位数投影值		入院人数投影值 诊疗人次数投影值	
	最小值	最大值	最小值	最大值
安 徽	0.8144	1.0334	0.0376	0.0693
北 京	1.0874	1.1752	0.0201	0.0273
福 建	1.0439	1.0439	0.0428	0.0428
甘 肃	0.7151	1.0675	0.0337	0.0713
广 东	1.1761	1.1761	0.0272	0.0272
广 西	1.0212	1.0653	0.0394	0.0511

#### 4.4.4 通过方向向量扫描建立无差异曲线

建立生产前沿的无差异曲线(等产量线或等投入线)可以直观地展示无效 DMU 所参考前沿的形状。现有文献中未发现通过 DEA 建立无差异曲线的实例,但有文献提出可以通过获得定义生产可能集的凸多面体的所有支撑超平面,然后可以建立无差异曲线(Olesen & Petersen, 2003)。当投入和产出指标较多时,获得所有支撑超平面的计算过程复杂,原理也不易于理解。

无差异曲线完全可以通过方向向量扫描的方法来实现,只要扫描精度足够高(扫描间隔角度足够小),就可以建立满足精度要求的无差异曲线。由于可以直接观察的无差异曲线是 2 维曲线或 3 维曲面。如果扫描间隔为  $1^\circ$ ,则建立 3 维曲面所需的扫描线数量为  $91 \times 91 = 8281$ ,计算量并不太大。通过方向向量扫描方法建立无差异曲线的原理简单,易于理解。

(1) 几种可以通过直接利用原始数据制作无差异曲线的情况。

1) 只有 1 种产出时,可以直接制作 CRS 模型的等产量线。例如,2 种投入  $(x_1, x_2)$ 、1 种产出  $(y)$  时可以直接制作投入导向的 CRS 模型等产量线。具体方法是:将两种投入  $x_1$  和  $x_2$  分别除以  $y$ ,获得每生产一个单位的产品所消耗的两种投入的数量  $z_1 = x_1/Y$  和  $z_2 = x_2/Y$ 。制作  $z_1$  和  $z_2$  的散点图,顺序连接处于前沿的所有点,即为等产量线(产量  $y=1$ ),如图 2-1 中的曲线 ABCD。

2) 只有 1 种投入时,可以直接制作 CRS 模型的等投入线。例如,1 种投入  $(x)$ 、2 种产出  $(y_1, y_2)$  时可以直接制作产出导向的 CRS 模型等投入线。具体方法是:将两种产出  $y_1$  和  $y_2$  分别除以  $x$ ,获得每消耗一个单位的投入所生产的两种产品的数量  $z_1 = y_1/x$  和  $z_2 = y_2/x$ 。制作  $z_1$  和  $z_2$  的散点图,顺序连接处于前沿的所有点,即为等产量线(产量  $x=1$ ),如图 2-2 中的曲线 ABCD。

直接制作无差异曲线，仅限于以上两种情况。以下情况下则无法直接制作无差异曲线：有 2 种及以上产出时无法直接制作 CRS 模型的等产量线；有 2 种及以上投入时，无法直接制作 CRS 模型的等投入线；有 1 种产出、2 种及以上投入时，不能直接制作 VRS 模型的等产量线；有 1 种投入、2 种及以上产出时，不能直接制作 VRS 模型的等投入线。

(2) 1 种产出 2 种投入时，通过方向向量扫描制作 CRS 模型的等产量线的步骤。

以表 4-32 的数据为例，通过方向向量扫描制作 CRS 模型的等产量线的步骤如下。

第一步，在原始数据中增加一个 DMU，例如命名为 S，S 的产出  $y=1$ （一般设为 1，代表产出数量为 1 的等产量线，也可设为其他任意正数）。投入设置为足够大的数，例如  $x_1=5$ ， $x_2=5$ 。如果投入数值设置过小，则获得的是不完整的等产量线。增加 S 后的数据如表 4-32 所示。

表 4-32 制作等产量线的示例数据 (1)

DMU	$x_1$	$x_2$	$y$
A	10.00	40.00	10.00
B	15.00	25.00	10.00
C	32.00	24.00	16.00
D	48.00	16.00	16.00
E	24.00	48.00	16.00
F	54.00	27.00	18.00
G	50.00	60.00	20.00
S	5.00	5.00	1.00

第二步，建立 S 的投入导向 CRS 方向向量扫描模型，扫描间隔设置为  $1^\circ$ ，共求解 91 个方向距离函数模型，在前沿上可获得 91 个扫描点（S 的投影点），扫描获得的由 91 个点顺序连接构成的曲线即为等产量线。计算投影点有两种方法，一是强有效投影，即投入目标值  $= X\lambda = x_s - \beta v - s^-$ ，建立的等产量线为强有效前沿等产量线；二是弱有效投影，即投入目标值  $= x_s - \beta v$ ，建立的等产量线为弱有效前沿等产量线。

第三步，利用 Excel 或统计软件，制作投影点的散点图，并顺序连接各投影点（见图 4-46）。

也可以直接利用原始数据中的某个无效 DMU，建立方向向量扫描模型，这样获得的等产量线是由支配该 DMU 的前沿构成（产量 = 该 DMU 的产量），这样的等产量线反映的是在该点的产出水平下，生产前沿各项投入的组合情况，可以直观地反映无效 DMU 在各个方向上改进的目标值及其距离。以 G 点为例，步骤如下：

第一步，跳过；

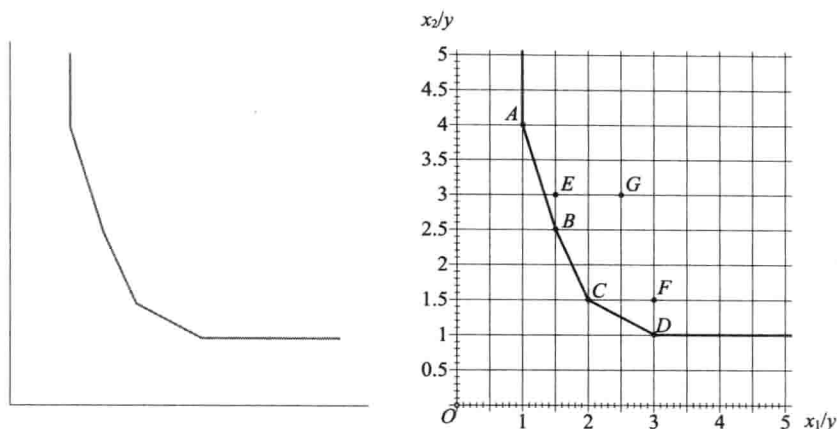


图 4-46 方向向量扫描建立的等产量线 (左)  
与利用原始数据直接制作的等产量线 (右)

第二步, 建立  $G$  的投入导向 CRS 方向向量扫描模型, 扫描间隔设置为  $1^\circ$ , 共求解 91 个方向距离函数模型, 在前沿上可获得 91 个扫描点 ( $G$  的投影点), 扫描获得的由 91 个点顺序连接构成的曲线即为等产量线。

第三步, 利用 Excel 或统计软件, 制作投影点的散点图, 并顺序连接各投影点。还可在散点图中加入  $G$  点 (见图 4-47)。

(3) 1 种产出 2 种投入时, 通过方向向量扫描制作 VRS 模型的等产量线的步骤。

利用方向向量扫描方法制作 VRS 模型的等产量线的方法与制作 CRS 模型等产量线的方法基本相同, 唯一区别是方向距离函数模型按照 VRS 进行设置, 即增加约束  $\sum \lambda = 1$ 。以表 4-33 中的数据为例, 制作  $J$  点的等产量线 ( $y=12$ ), 如图 4-48 所示。

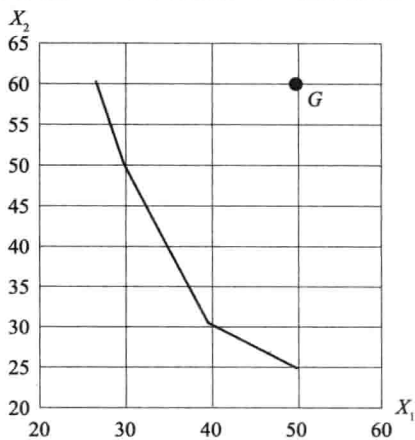


图 4-47  $G$  点的等产量线  
(产量  $Y=20$ )

表 4-33 制作等产量线的示例数据 (2)

DMU	$x_1$	$x_2$	$y$
A	10	40	10
B	15	25	10
C	32	24	16
D	48	16	16
H	24	48	16
I	54	27	12
J	50	60	12

(4) 1 种投入 2 种产出时, 通过方向向量扫描制作 CRS 和 VRS 模型的等投入线。

利用方向向量扫描方法制作等投入线的方法与制作等产量线的方法基本相同, 主要区别是采用产出导向的方向距离函数模型。以表 4-34 中的数据为例, 制作  $T$  点的等投入线 ( $X=497$ ) 如图 4-49 所示。

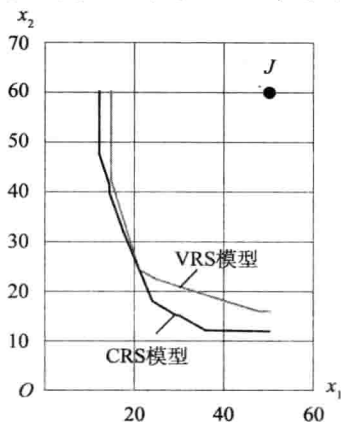


图 4-48  $J$  点的等产量线

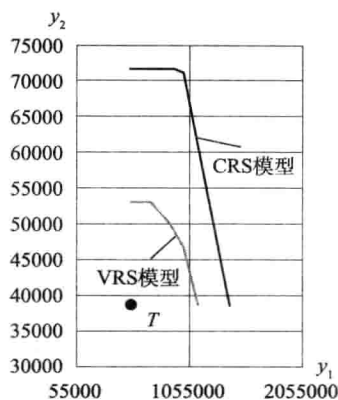


图 4-49  $T$  点的等投入线

表 4-34 制作等产量线的示例数据 (3)

DMU	$x$	$y_1$	$y_2$
A	887	1683441	59423
B	277	556126	39967
C	326	1001634	19712
D	504	953445	15142
E	365	809861	18665
F	312	276522	19910
G	358	837199	19624
H	329	408298	28140
I	404	175363	18269
J	423	581887	29626
K	226	606911	17823
L	811	1892727	30132
M	310	383334	17396
N	745	1462558	56906
O	473	896914	36645
P	209	497666	16271
Q	365	320467	26920
R	472	354200	25571
S	779	939097	69922
T	497	538589	38788

(5) 多种投入、多种产出时，通过方向向量扫描制作等投入线或等产出线。

当有 3 种投入时，可制作 3 种投入的等产量面，或固定其中 1 种投入，制作另外 2 种投入的等产量线；当有 4 种及以上投入时，可制作 3 种投入的等产量面或其中 2 种投入的等产量线（固定其他投入）。制作等产量线所采用的 VRS 方向距离函数为

$$\begin{aligned} & \max \beta \\ & \text{s. t. } X^{\text{free}} \lambda + \beta v + s^- = s_D^{\text{free}} \quad (\text{等产量线显示的 2 种或 3 种投入}) \\ & \quad X^{\text{fix}} \lambda \leq x_D^{\text{fix}} \quad (\text{其他被固定的投入}) \\ & \quad Y \lambda \geq y_D \end{aligned} \quad (4-62)$$

被固定的投入在 MaxDEA 软件中相应的设置为：在 Advanced Models (1) 界面，勾选 Nondiscretionary Inputs/Outputs，并点击 Define，将要固定的指标由 Full Discretion 改为 Part - or Non - Discretion，并将 Degree of Discretion 设置为 100%（见图 4-50）。关于 Nondiscretionary Inputs/Outputs（不可控投入/产出）模型将在后面章节详细介绍。

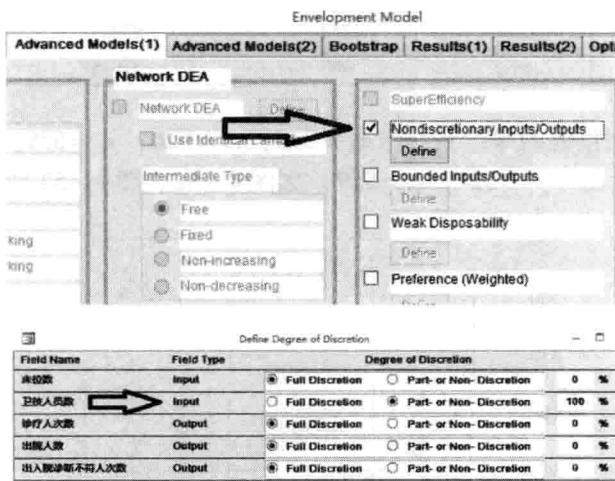


图 4-50 设置被固定的投入

表 4-35 中的数据为 20 家医院某年的职工数量和医疗服务数量，数据包含 3 项投入（医生数、护士数、其他人员数）和 2 项产出（门急诊人次和出院人数）。固定 1 项投入（ $x_2$ ，护士数）。

表 4-35 制作等产量线的示例数据 (4)

DMU	医生数 ( $x_1$ )	护士数 ( $x_2$ )	其他人员数 ( $x_3$ )	门急诊人次 ( $y_1$ )	出院人数 ( $y_2$ )
A	887	1090	1086	1683441	59423
B	277	252	366	556126	39967
C	326	475	380	1001634	19712
D	504	524	559	953445	15142

续表

DMU	医生数 ( $x_1$ )	护士数 ( $x_2$ )	其他人员数 ( $x_3$ )	门急诊人次 ( $y_1$ )	出院人数 ( $y_2$ )
E	365	543	314	809861	18665
F	312	469	236	276522	19910
G	358	340	171	837199	19624
H	329	329	325	408298	28140
I	404	260	291	175363	18269
J	423	1021	766	581887	29626
K	226	349	263	606911	17823
L	811	1136	865	1892727	30132
M	310	576	318	383334	17396
N	745	1147	626	1462558	56906
O	473	580	355	896914	36645
P	209	327	273	497666	16271
Q	365	327	282	320467	26920
R	472	427	309	354200	25571
S	779	1208	747	939097	69922
T	497	683	488	538589	38788

以  $D$  为例制作的等产量线 ( $x_2 = 524$ ,  $y_1 = 524$ ,  $y_2 = 559$ ) 如图 4-51 所示; 三维等产量面 ( $y_1 = 524$ ,  $y_2 = 559$ ) 如图 4-52、图 4-53 所示。

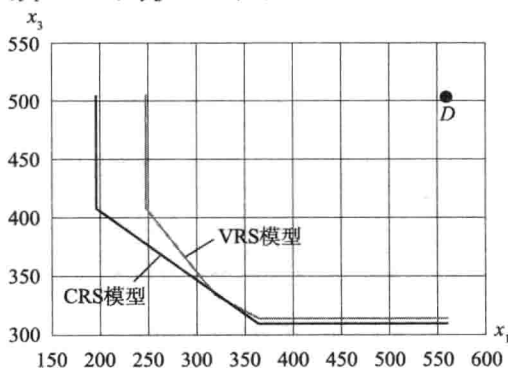


图 4-51  $D$  点的等产量线

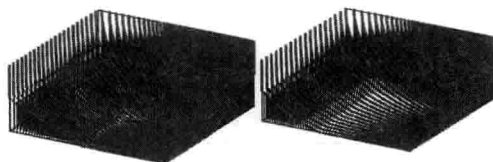


图 4-52  $D$  点的等产量面三维散点图 (左 CRS 模型, 右 VRS 模型) ①

① 三维散点图可使用统计软件 SPSS 制作, 也可以使用 Stata 中的第三方命令 scat3 制作。

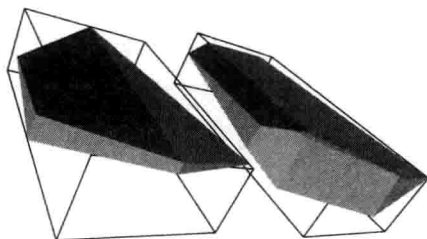


图4-53 D点的等产量面三维仰视图(左CRS模型,右VRS模型)①

## 4.5 至弱有效前沿最近距离

### 4.5.1 至弱有效前沿最近距离的计算方法

至弱有效前沿的最近距离 (Minimum Distance to Weak Efficient Frontier, MinDW) 是指被评价 DMU 与前沿的最近距离, 无论其在前沿的投影点是强有效还是弱有效。这种方法在多个文献 (Briec, 1999; Charnes A, et al., 1996) 中提到, 其方法可表示为  $m+q$  个线性规划 ( $m$  为投入指标数量,  $q$  为产出指标数量):

$$\begin{aligned} & \max \beta_z, z = 1, 2, \dots, m+q \\ \text{s. t. } & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + \beta_z e_i \leq x_{ik}, i = 1, 2, \dots, m \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - \beta_z e_r \geq y_{rk}, r = 1, 2, \dots, q \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

$e_i$  和  $e_r$  是常数, 在规划式中只有一个  $e$  等于 1, 其他均为 0, 即

$$\begin{aligned} e_i &= 1 \text{ if } i = z; e_i = 0 \text{ if } i \neq z \\ e_r &= 1 \text{ if } r = z - m; e_r = 0 \text{ if } r \neq z - m \end{aligned}$$

$$\text{每个模型的效率值表示为 } \theta_z^* = \frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \beta_z^* e_i / x_{ik}}{1 + \frac{1}{q} \sum_{r=1}^q \beta_z^* e_r / y_{rk}}$$

MinDW 模型效率值表示为  $\theta_{\max}^* = \max(\theta_z^*, z = 1, 2, \dots, m+q)$ , 最大的效率值对应最小的  $\beta^*$ , 即至前沿的最近距离。

如果是投入导向, 则有  $m$  个线性规划

$$\begin{aligned} & \max \beta_z, z = 1, 2, \dots, m+q \\ \text{s. t. } & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + \beta_z e_i \leq x_{ik}, i = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

① 三维凸多面体的制作可采用软件 Qhull, 三维凸多面体的显示可采用软件 Geomview。

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{rk}, r = 1, 2, \dots, q$$

$$\lambda \geq 0$$

如果是产出导向, 则有  $q$  个线性规划:

$$\max \beta_z, z = 1, 2, \dots, m + q$$

$$\text{s. t. } \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_{ik}, i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - \beta_z e_r \geq y_{rk}, r = 1, 2, \dots, q$$

$$\lambda \geq 0$$

MinDW 模型组与扫描间隔为  $90^\circ$  的方向向量扫描模型等价。扫描间隔为  $90^\circ$  的方向向量扫描模型得到的所有  $n$  维方向向量正好是  $n$  维向量的标准基。

$$\{1, 0, 0, \dots\}; \{0, 1, 0, \dots\}; \{0, 0, 1, \dots\}; \dots \{0, 0, \dots, 1\}$$

这与前面提出的 MinDW 模型中所定义的  $e_i$  和  $e_r$  相同 (Briec, 1999; Charnes A, et al., 1996)。

先看一个简单的投入导向的二维方向向量模型的例子。

在图 4-54 中,  $G$  点的前沿曲线为  $MBCN$ , 在曲线  $MBCN$  上存在一点, 该点的坐标值的算术平均值最大。可以证明:

(1) 因为  $MBCN$  曲线是凸的, 所以  $MBCN$  曲线上的任意一点均可以在  $MN$  线段上找到一点  $V$ , 使  $V$  点坐标值的算术平均值大于或等于  $MBCN$  曲线上该点坐标值的算术平均值。

(2)  $V$  点在  $MN$  上移动时, 其坐标值的算术平均值是单调递增或递减的。

在线段  $MN$  上, 当  $V$  点从  $M$  向  $N$  滑动时,  $V$  点的坐标值可以用  $M$  和  $N$  的线性组合来表示。利用相似三角形的性质, 可以证明

$$v_1 = m_1 + (n_1 - m_1)\lambda$$

$$v_2 = m_2 - (m_2 - n_2)\lambda = m_2 + (n_2 - m_2)\lambda$$

$$\frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{m_1 + m_2}{2} + \left( \frac{n_1 + n_2}{2} - \frac{m_1 + m_2}{2} \right) \lambda$$

$$\frac{v_1 + v_2}{2} - \frac{m_1 + m_2}{2} = \left( \frac{n_1 + n_2}{2} - \frac{m_1 + m_2}{2} \right) \lambda$$

$$\lambda = \frac{MV}{MN}$$

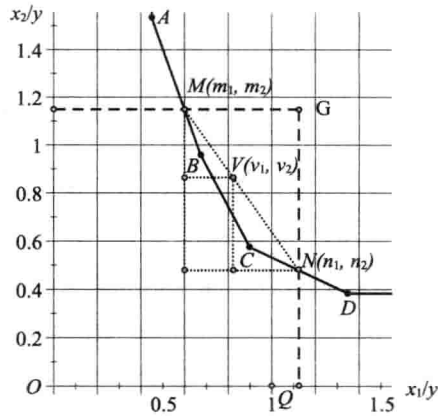


图 4-54 方向向量扫描模型实现 MinDW 模型 (投入导向模型)



$$\lambda \in [0,1]$$

当  $\lambda = 0$  时,  $V$  点与  $M$  点重合; 当  $\lambda = 1$  时,  $V$  点与  $N$  点重合。

$V$  点坐标值的算术平均值与  $M$  点坐标值的算术平均值之差等于  $N$  点坐标值的算术平均值与  $M$  点坐标值的算术平均值之差的  $\lambda$  倍, 所以当  $V$  点在  $MN$  上移动时, 其坐标值的算术平均值是单调递增或递减的。在线段  $MN$  上坐标值的算术平均值最大的点是其端点  $M$  或  $N$ 。

所以, 曲线  $MBCN$  上坐标值的算术平均值最大的点是其端点  $M$  或  $N$ 。

以  $M$  作为投影点的方向向量为  $(1, 0)$ , 以  $N$  作为投影点的方向向量为  $(0, 1)$ 。

当推广到  $n$  维方向向量时,  $n$  维向量的标准基所对应的点包含了坐标值的算术平均值最大的点, 也就是方向向量扫描模型中效率值最大的方向向量。

表 4-36 是从扫描间隔  $90^\circ$  开始, 逐渐减小扫描间隔时得到的最大效率值。当扫描间隔从  $90^\circ$  减少到  $5.63^\circ$  时, 各 DMU 所获得的 MinDW 效率值没有任何变化, 这验证了上述推断。

表 4-36 通过方向向量扫描模型实现 MinDW 模型 (非导向 VRS)

医院	方向向量扫描模型最大效率值				
	间隔 $90^\circ$	间隔 $45^\circ$	间隔 $22.5^\circ$	间隔 $11.3^\circ$	间隔 $5.63^\circ$
A	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
B	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
C	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
D	0.937	0.937	0.937	0.937	0.937
E	0.880	0.880	0.880	0.880	0.880
F	0.852	0.852	0.852	0.852	0.852
G	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
H	0.883	0.883	0.883	0.883	0.883
I	0.985	0.985	0.985	0.985	0.985
J	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800
K	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
L	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
M	0.842	0.842	0.842	0.842	0.842
N	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
O	0.916	0.916	0.916	0.916	0.916
P	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
Q	0.885	0.885	0.885	0.885	0.885
R	0.795	0.795	0.795	0.795	0.795
S	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
T	0.844	0.844	0.844	0.844	0.844

MinDW 模型效率值的计算方法与方向距离函数模型相同，即采用式(4-47)，在此不再重复。

MinDW 模型效率值不会小于采用任何方向向量的方向距离函数模型或其他距离类型（例如径向和 SBM）的效率值。也就是说，MinDW 模型得出的效率值是最大的。

#### 4.5.2 MaxDEA 求解 MinDW 模型示例

用 MaxDEA 求解 MinDW 模型时，须在 Distance 界面选择 Minimum Distance to Weak Efficient Frontier，其他与方向距离函数模型设置相同（见图 4-55）。注意，因为在 MinDW 模型组的一个模型中， $\alpha$ 、 $\beta$  和  $\gamma$  三个变量只会出现其中一个，所以是否勾选  $\alpha = \beta$  和  $\beta = \gamma$ ，没有实际作用。

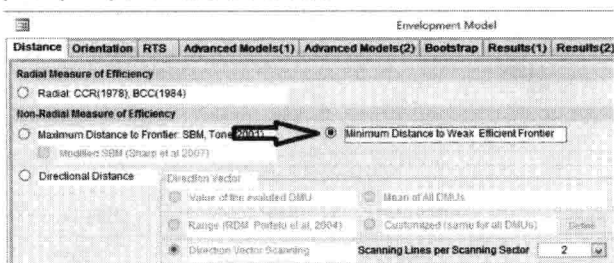


图 4-55 选择 MinDW 模型

另外，通过方向向量扫描模型，并设置扫描间隔为  $90^\circ$ ，然后从获得的扫描结果中筛选出效率值最大（或者  $\beta$  值最小）者，与 MinDW 模型得出的结果相同（见图 4-56）。

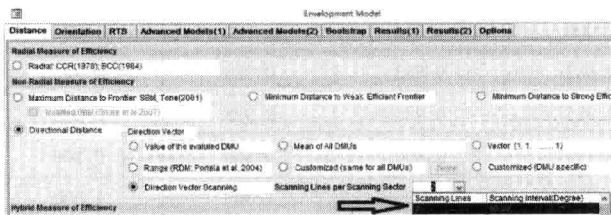


图 4-56 设置扫描间隔

采用表 4-28 中的数据，对径向模型、方向距离函数模型和 MinDW 模型得出的效率值的比较见表 4-37。三类模型的共同设置为 Orientation = Output-oriented, RTS = VRS,  $\beta = \gamma$ ，好产出与坏产出权重设置为 2:1<sup>①</sup>，坏产出为强可处置；方向距离函数和 MinDW 模型均不设置指标权重；方向距离函数模型的方向向量采用 (1, 1, 1, 15, -15)。

① 在径向模型中，在设置  $\beta = \gamma$  之后，好产出与坏产出的权重 ( $w_g, w_b$ ) 没有作用。

表4-37 不同类型距离函数模型效率值比较

地区	径向	DDF	MinDW
北京	1.0000	1.0000	1.0000
甘肃	0.9026	0.8480	0.9534
广东	1.0000	1.0000	1.0000
广西	0.9985	0.9944	0.9995
贵州	0.9908	0.9670	0.9967
海南	0.9276	0.8275	0.9746

## 4.6 混合距离函数

混合距离函数 (Hybrid Distance) 是指在同一模型中包含多种距离函数类型, 主要分为两种。

一种是由 Tone K & Tsutsui (2010) 提出的一种包含径向与 SBM 两类距离函数的混合模型。因模型中使用  $\varepsilon$  参数, Tone 将其称为 Epsilon - Based Measure (EBM)。

另一种也是由 Tone 提出的 (Cooper William W, et al., 2007)。它是在同一模型中, 部分投入和产出指标采用径向距离, 保持等比例改进, 而其余投入和产出指标采用 SBM 距离。Tone 将这类模型称为 Hybrid 模型<sup>①</sup>。

### 4.6.1 EBM 模型

下面以投入导向 CRS 模型为例, 介绍 EBM 模型的计算过程。投入导向 CRS EBM 模型的线性规划式表示为

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \theta - \varepsilon \frac{1}{\sum_{i=1}^m w_i^-} \sum_{i=1}^m \frac{w_i^- s_i^-}{x_k} \\
 \text{s. t.} \quad & X\lambda - \theta x_k + s^- = 0 \\
 & Y\lambda \geq y_k \\
 & \lambda \geq 0, s^- \geq 0
 \end{aligned} \tag{4-63}$$

被评价 DMU 的效率值为目标函数的最优解, 即

$$\theta^* - \varepsilon \sum_{i=1}^m \frac{w_i^- s_i^-^*}{x_k}$$

模型中有  $m+1$  个参数:  $\varepsilon$  和  $w_i^-$  ( $i=1, 2, \dots, m$ )。  $w_i^-$  表示各项投入指标的相对重要程度,  $\varepsilon$  是一个关键参数, 取值范围为  $[0, 1]$ , 它表示在效率值的计算中非径向部分的重要程度: 取 0 时相当于径向模型; 取 1 时相当于 SBM 模型。

这些参数值需要在建立 EBM 模型之前确定。Tone K. 和 Tsutsui (2010) 认

<sup>①</sup> 从模型距离函数的意义上讲, 这两类模型都包含混合距离函数, 都可以称为 Hybrid 模型。为了区分, 按照原作者的命名, 分别称为 EBM 和 Hybrid 模型。

为这些参数应由数据本身来确定，并提出了计算方法。以两项投入 ( $x_1$  和  $x_2$ ) 的模型为例，方法介绍如下。

首先，通过 SBM 模型或其他模型获得各项投入指标的投影值<sup>①</sup>。此处为  $x_1$  和  $x_2$  两项投入指标，其投影值记为  $P_1$  和  $P_2$ 。两个指标投影值之间的关联性代表着在该项生产技术（生产前沿）中两项投入的数量比例关系。通过分析二者的数量关系，可以得出他们之间在生产过程中的可替代性：如果两种投入的数量呈现高度线性正相关，说明二者之间可替代性差，需要以相对固定的比例进行生产，对生产效率的测量以径向测量为主， $\varepsilon$  宜取较小数值，甚至为 0；如果两种投入的数量呈现高度线性负相关，则说明二者之间可替代性强，不要求以固定比例进行生产，对生产效率的测量以非径向模型为主， $\varepsilon$  宜取较大数值，甚至为 1。

然后，建立投入指标投影值的关联矩阵，矩阵的元素由各项投入指标投影值两两之间的关联指数构成。此处为两项投入，该矩阵如表 4-38 所示。

表 4-38 关联指数矩阵

	$x_1$	$x_2$
$x_1$	$S(P_1, P_1)$	$S(P_1, P_2)$
$x_2$	$S(P_2, P_1)$	$S(P_2, P_2)$

$S$  是计算两个投入指标的目标值  $P_1$  和  $P_2$  之间关联指数的函数。Tone K 和 Tsutsui (2010) 认为关联指数应符合以下规则：

(1) 同一性： $S(a, a) = 1$ ，自身关联指数 = 1；

(2) 对称性： $S(a, b) = S(b, a)$ ，计算的指数与两个指标的前后顺序无关；

(3) 单位不变性： $S(ta, b) = S(a, b)$  ( $t > 0$ )，数据的测量单位对计算的指标数值没有影响；

(4) 数值范围： $0 \leq S(a, b) \leq 1$ ，计算的指数数值在 0~1。

遵循这样的思路，我们首先想到的是  $S$  采用线性相关系数，即 Pearson 相关系数。Tone K 和 Tsutsui (2010) 认为，Pearson 相关系数未能满足上述条件。

Tone K 和 Tsutsui (2010) 的方法是先用离散指数函数计算指标两两之间的离散指数。然后用离散指数计算关联指数：

$$S(a, b) = 1 - 2D(a, b)$$

离散指数计算方法为

$$D(a, b) = \begin{cases} \frac{\sum_{j=1}^n |c_j - \bar{c}|}{n(c_{\max} - c_{\min})} & (\text{if } c_{\max} > c_{\min}) \\ 0 & (\text{if } c_{\max} = c_{\min}) \end{cases}$$

① 在 MaxDEA 软件中，投影值的计算方法采用 SBM 模型。

$$c_j = \ln \frac{b_j}{a_j}, \bar{c} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln \frac{b_j}{a_j}, c_{\max} = \max(c_j), c_{\min} = \min(c_j)$$

最后, 利用建立的关联指数矩阵, 计算 EBM 中所需的参数。

$$\varepsilon = \frac{m - \max(\rho)}{m - 1}$$

$$w_i = \frac{v_i}{\sum_{i=1}^m v_i}$$

$\rho$  是关联指数矩阵的最大特征根,  $v$  是其对应的特征向量。

产出导向 EBM 模型的规划式表示为

$$\begin{aligned} & \min \frac{1}{\varphi + \varepsilon^+ \frac{1}{\sum_{r=1}^q w_r^+} \sum_{r=1}^q \frac{w_r^+ s_r^+}{y_k}} \\ & \text{s. t. } X\lambda \leq x_k \\ & \quad Y\lambda - \varphi y_k - s^+ = 0 \\ & \quad \lambda \geq 0, s^- \geq 0 \end{aligned} \quad (4-64)$$

非导向 EBM 模型的规划式表示为

$$\begin{aligned} & \min \frac{\theta - \varepsilon^- \frac{1}{\sum_{i=1}^m w_i^-} \sum_{i=1}^m \frac{w_i^- s_i^-}{x_k}}{\varphi + \varepsilon^+ \frac{1}{\sum_{r=1}^q w_r^+} \sum_{r=1}^q \frac{w_r^+ s_r^+}{y_k}} \\ & \text{s. t. } X\lambda - \theta x_k + s^- = 0 \\ & \quad Y\lambda - \varphi y_k - s^+ = 0 \\ & \quad \lambda \geq 0, s^- \geq 0 \end{aligned} \quad (4-65)$$

#### \* 4.6.2 EBM 模型的缺陷与改进方法

缺陷 1: EBM 模型的投影值会出现逻辑错误。

在投入导向 EBM 模型 (4-63) 中, 变量  $\theta$  取值范围没有限制, Tone K 和 Tsutsui (2010) 对此也没有讨论。在对变量  $\theta$  取值范围没有约束的情况下, 模型最优解  $\theta^*$  有可能大于 1。无效 DMU 的投入指标的投影值有可能高于其原始值, 即会出现改进目标是“增加投入”的错误。

同样, 在产出导向 EBM 模型 (4-64) 中, 对变量  $\varphi$  取值范围没有约束的情况下, 模型最优解  $\varphi^*$  有可能小于 1。无效 DMU 的产出指标的投影值有可能低于其原始值, 即会出现改进目标是“减少产出”的错误。

在非导向 EBM 模型 (4-65) 中, 问题更为突出, 上述两种错误都可能会出现。

在此以表 4-28 数据为例演示这一问题。采用 VRS 模型, 分别求解投入导向、产出导向和非导向 EBM 模型, EBM 参数方法采用 Tone K 和 Tsutsui (2010) 的关联指数方法。错误结果见表 4-39、表 4-40 和表 4-41。

表 4-39 EBM 模型的错误结果 (投入导向 VRS)

地区	效率值	$\theta$	床位数原始值	床位数投影值
广西	0.9834	1.0001	95752	95760
江西	0.9979	1.0037	87184	87504
天津	0.9855	1.0295	40787	41991

表 4-40 EBM 模型的错误结果 (产出导向 VRS)

地区	效率值	$\varphi$	入院人数原始值	入院人数投影值
安徽	0.8414	0.9929	4391516	4360170
广西	0.9217	0.9749	3258438	3176512
贵州	0.8257	0.8953	2433370	2178564
河南	0.8412	0.9580	7043628	6747705
湖北	0.8907	0.9984	4805124	4797549
湖南	0.8263	0.9408	5393968	5074549
江苏	0.9520	0.9949	6433837	6401057
江西	0.8780	0.9097	3000964	2729925
山东	0.8318	0.9370	8354234	7827682
四川	0.9196	0.9199	6489314	5969408
新疆	0.8625	0.8795	3115413	2740144

表 4-41 EBM 模型的错误结果 (非导向 VRS)

地区	效率值	$\theta$	$\varphi$	床位数原始值	床位数投影值	卫技人员数原始值	卫技人员数投影值	诊疗人次原始值	诊疗人次投影值	入院人数原始值	入院人数投影值
安徽	0.8407	1.1771	1.1718	140997	165965	132739	156245				
甘肃	0.8048	2.0742	2.4323	66661	138266	53127	110195				
广西	0.9163	2.2404	2.1091	95752	214524	105773	236975				
贵州	0.8209	1.9629	1.9375	78368	153830	69320	136070				
海南	0.7464	11.5154	13.0687	21367	246050	26329	289388				
河北	0.7959	0.9346	0.9649							5675067	5475952
河南	0.8112	0.7144	0.7576							7043628	5336206
黑龙江	0.6273	1.3622	1.8426	129449	176338	127358	173489				
湖北	0.8903	1.1378	1.1231	152062	173022	147628	167977				
湖南	0.8232	0.6101	0.5290							5393968	2853139
吉林	0.6934	1.6842	2.1743	94636	159390	86278	145313				
江苏	0.9095	0.6091	0.6697					166944454	111801185	6433837	4308682
江西	0.8685	2.3167	2.1414	87184	201978	93287	216116				
内蒙古	0.6604	2.5478	3.3446	72871	185659	74177	188987				
宁夏	0.7982	8.0824	9.2620	22037	178112	21830	176439				

为了避免产生这样的错误,需要在 EBM 模型中对  $\theta$  和  $\varphi$  进行约束,以非导

向 EBM 模型为例,修正后的规划式为

$$\begin{aligned} & \min \frac{\theta - \varepsilon^- \frac{1}{\sum_{i=1}^m w_i^-} \sum_{i=1}^m \frac{w_i^- s_i^-}{x_k}}{\varphi + \varepsilon^+ \frac{1}{\sum_{r=1}^q w_r^+} \sum_{r=1}^q \frac{w_r^+ s_r^+}{y_k}} \\ & \text{s. t. } X\lambda - \theta x_k + s^- = 0 \\ & \quad Y\lambda - \varphi y_k - s^+ = 0 \\ & \quad \lambda \geq 0, s^- \geq 0, \theta \leq 1, \phi \geq 1 \end{aligned} \quad (4-66)$$

EBM 模型与径向模型和 SBM 模型的关系如下。

(1) 如果  $\varepsilon = 0$ , 则 EBM 模型等同于径向模型。

(2) 如果  $\varepsilon = 1$ , 则 EBM 模型等价于 (加权) SBM 模型, 此时由于增加了变量  $\theta$  和 (或)  $\varphi$ , 模型可能会存在无穷多个最优解, 但所有最优解的效率值和投影值均相等。

缺陷 2: 关联指数的计算方法存在缺陷。

Tone K 和 Tsutsui (2010) 指出, 关联指数的计算具有以下特点: 两个指标的投影值呈现极度径向分布的情况下, 关联指数应该等于 1; 而在极度离散的情况下, 关联指数应该等于 0 (见图 4-57)。Tone K 和 Tsutsui (2010) 给出了两个简单的示例来说明这一特点, 其中极度离散的示例 (该文献中提供的 Example 2), 计算得出的关联指数为 0。但是, 这一示例过于简单, 只有两个有效 DMU, 不能说明问题。

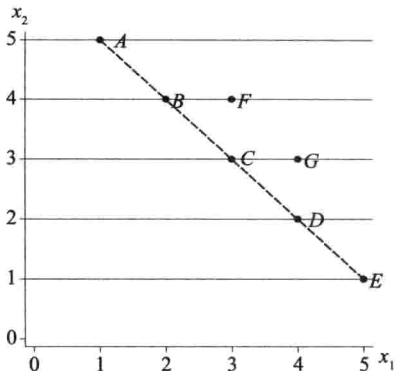


图 4-57 离散数据示例

在此给出一个简单的极度离散的示例 (见表 4-42), 来说明 Tone K 和 Tsutsui (2010) 提出的关联指数计算方法并不符合上述要求。如图 4-56 所示, 两项投入指标投影值之间呈现完全线性负相关的关系<sup>①</sup>。

表 4-42 关联指数计算示例数据

DMU	$x_1$	$x_2$	$y$
A	1	5	1
B	2	4	1
C	3	3	1
D	4	2	1
E	5	1	1
F	3	4	1
G	4	3	1

① 无效 DMU 的投影值为 5 个有效 DMU 其中之一。

根据前面关联指数的计算方法，得出的关联指数为  $S(P_1, P_2) = 0.428$ ， $\varepsilon = 0.572$ （见表 4-43）。这一结果与 Tone K 和 Tsutsui（2010）建立关联指数的理论相悖（见表 4-44）。

表 4-43 示例数据的关联指数矩阵

	$x_1$	$x_2$
$x_1$	1	0.428
$x_2$	0.428	1

表 4-44 示例数据的离散指数矩阵

	$x_1$	$x_2$
$x_1$	0	0.286
$x_2$	0.286	0

我们再回到最常用来表示两个指标相似性的 Pearson 相关系数。事实上，Pearson 相关系数满足 Tone K 和 Tsutsui（2010）提出的第 1~3 条规则，只是不满足第 4 条规则。但是只需通过简单的数据转换，即可将其数值范围调整为  $[0, 1]$ 。

$$S(a, b) = 0.5 + 0.5R(x_1, x_2),$$

$R(x_1, x_2)$  是两个指标的 Pearson 相关系数。

如果两项指标的投影值呈现径向分布，其 Pearson 相关系数数值较大，则说明两种投入之间可替代性差；如果两项指标的投影值呈现类似图 4-57 那样的离散分布，其 Pearson 相关系数数值为负数，且绝对值较大，两种投入之间的可替代性强（见图 4-58）。

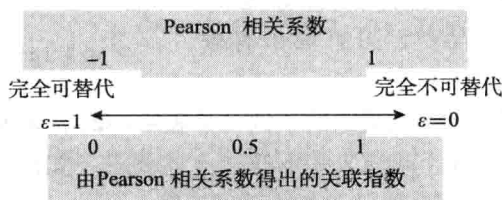


图 4-58 Pearson 相关系数与新的关联指数的关系

由表 4-42 中数据计算得出的新关联指数（见表 4-45）。

$$S(P_1, P_2) = 0.5 + 0.5R(P_1, P_2) = 0.5 + 0.5 \times (-1) = 0.$$

表 4-45 新关联指数矩阵

	$x_1$	$x_2$
$x_1$	1	0
$x_2$	0	1

新关联指数矩阵的最大特征根为 1，因此



$$\varepsilon = \frac{m - \max(\rho)}{m - 1} = \frac{2 - 1}{2 - 1} = 1$$

此时 EBM 模型等价于 SBM 模型。

虽然经过以上分析,采用由 Pearson 相关系数计算得出的关联指数来构建 EBM 模型的参数更为适宜,但是在实际应用时,EBM 模型的参数完全可以由决策者根据生产技术本身的特性和决策偏好来决定  $\varepsilon$  和  $w$  的数值大小,而不是由数据自身来确定。

### 4.6.3 Hybrid 模型

在实际生产过程中,当投入(产出)要素较多时,有些投入(产出)要素需要保持相对固定的比例,有些投入(产出)要素则互相之间具有可替代性。在这种情况下,在 DEA 模型中可将投入(产出)要素分为两种类型:一类为径向指标,另一类是非径向指标。

Hybrid 模型的规划式为

$$\begin{aligned} \min \rho &= \frac{1 - \frac{m_1}{m}(1 - \theta) - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m_2} s_i^{N-} / x_{ik}^N}{1 + \frac{q_1}{q}(\varphi - 1) + \frac{1}{q} \sum_{r=1}^{q_2} s_r^{N+} / y_{rk}^N} \\ \text{s. t. } & X^R \lambda + s^{R-} - \theta x_k^R = 0 \\ & X^N \lambda + s^{N-} = x_k^N \\ & Y^R \lambda - s^{R+} - \varphi y_k^R = 0 \\ & Y^N \lambda - s^{N+} = y_k^N \\ & \lambda, s^-, s^+ \geq 0 \end{aligned}$$

其中,上标  $R$  表示径向指标,  $N$  表示非径向指标;  $m$  为投入指标数量,其中  $m_1$  为径向指标数量,  $m_2$  为非径向指标数量;  $q$  为产出指标数量,其中  $q_1$  为径向指标数量,  $q_2$  为非径向指标数量。

在 Hybrid 模型的无效率值可按投入、产出、径向和非径向进行分解:

$$\text{投入径向无效率} = \frac{m_1}{m}(1 - \theta)$$

$$\text{投入非径向无效率} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m_2} s_i^{NR-} / x_{ik}^{NR}$$

$$\text{产出径向无效率} = \frac{q_1}{q}(\varphi - 1)$$

$$\text{产出非径向无效率} = \frac{1}{q} \sum_{r=1}^{q_2} s_r^{NR+} / y_{rk}^{NR}$$

投入导向 Hybrid 模型的规划式为

$$\min \rho = 1 - \frac{m_1}{m}(1 - \theta) - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m_2} s_i^{N-} / x_{ik}^N$$

$$\begin{aligned} \text{s. t. } & X^R \lambda + s^{R-} - \theta x_k^R = 0 \\ & X^N \lambda + s^{N-} = x_k^N \\ & Y \lambda \geq y_k \\ & \lambda, s^- \geq 0 \end{aligned}$$

产出导向 Hybrid 模型的规划式为

$$\begin{aligned} \min \rho = & \frac{1}{1 + \frac{q_1}{q}(\varphi - 1) + \frac{1}{q} \sum_{r=1}^{q_2} s_r^{N+} / y_{rk}^N} \\ \text{s. t. } & X \lambda \leq x_k \\ & Y^R \lambda - s^{R+} - \varphi y_k^R = 0 \\ & Y^N \lambda - s^{N+} = y_k^N \\ & \lambda, s^+ \geq 0 \end{aligned}$$

Hybrid 模型与径向模型和 SBM 模型的关系如下。

- (1) 如果所有投入和产出指标均设置为径向，则 Hybrid 模型等同于径向模型。
- (2) 如果所有投入和产出指标均设置为非径向，则 Hybrid 模型等同于 SBM 模型。

#### 4.6.4 MaxDEA 软件求解混合距离函数模型操作方法

在 MaxDEA 软件中，混合距离函数模型的求解除 Distance 的设置之外，其他选项与其他距离函数类型相同。

EBM 模型需要选择生成参数 ( $\varepsilon$  和  $w$ ) 的方法：

- (1) 采用 Tone K 和 Tsutsui (2010) 的方法 (见图 4-59)；

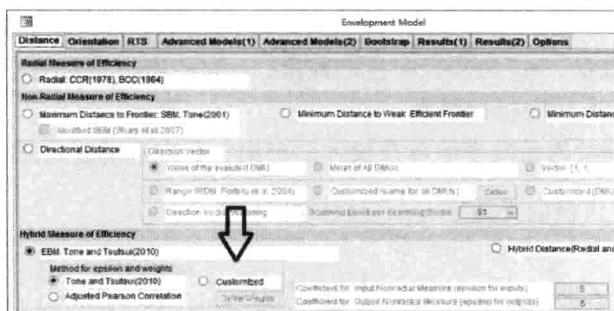


图 4-59 设置 EBM 模型参数

- (2) 采用本书中介绍的调整 Pearson 相关系数；
- (3) 由用户输入参数，包括  $\varepsilon$  和  $w$  (指标权重)。投入和产出的  $\varepsilon$  值可直接填写 (Coefficient for Input Nonradial Measure, Coefficient for Output Nonradial Measure)。点击 Define Weights 按钮，可以打开投入和产出指标权重设置界面。

Hybrid 模型需要指定哪些是径向指标，哪些是非径向指标。点击 Define 按

钮，打开设置界面，如图4-60所示。

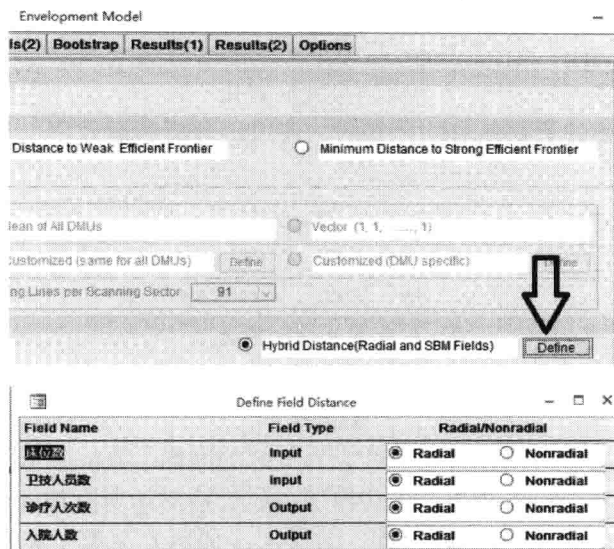


图4-60 设置 Hybrid 模型参数

## 4.7 包含价格信息的距离函数

### 4.7.1 成本效率、收益效率、利润效率模型

DEA 得到广泛应用的原因之一是技术效率的分析不需要投入和产出指标的价格信息。但是，当价格信息已知时，则可以进一步利用价格信息对配置效率进行分析。例如，如果投入要素的价格已知，则可以分析成本效率，并通过比较成本效率与技术效率，得出配置效率（Färe R, et al., 1985; Farrell, 1957）。被评价  $DMU_k$  的成本效率（Cost Efficiency,  $CE$ ）模型表示为

$$\begin{aligned}
 CE &= \frac{cx^*}{cx_k} \\
 cx^* &= \min cx \\
 \text{s. t. } x &\geq X\lambda \\
 y_k &\leq Y\lambda \\
 \lambda &\geq 0
 \end{aligned} \tag{4-67}$$

$c$  表示价格向量。成本效率、配置效率（Allocative Efficiency,  $AE$ ）和技术效率的关系为

$$\text{成本效率}(CE) = \text{技术效率}(TE) * \text{配置效率}(AE)。$$

当产出的价格信息已知时，可以分析收益效率（Revenue Efficiency,  $RE$ ）：

$$RE = \frac{ry_k}{ry^*}$$

$$\begin{aligned}
 ry^* &= \max ry \\
 \text{s. t. } &x_k \geq X\lambda \\
 &y \leq Y\lambda \\
 &\lambda \geq 0
 \end{aligned} \tag{4-68}$$

当投入和产出的价格信息均已知时，还可以分析利润效率（Profit Efficiency, PE）：

$$\begin{aligned}
 PE &= \frac{ry_k - cx_k}{ry^* - cx^*} \\
 ry^* - cx^* &= \max ry - cx \\
 \text{s. t. } &x = X\lambda \leq x_k \\
 &y = Y\lambda \geq y_k \\
 &\lambda \geq 0
 \end{aligned} \tag{4-69}$$

针对利润模型得出的利润效率可能为负数的问题，Tone 提出了收益/成本比值效率模型。另外，Tone 指出，上述模型中的价格对于所有被评价 DMU 都是相同的，而实际生产过程中，每个 DMU 的投入（原料）采购价格和产出（产品）销售价格往往并不相同。为了克服上述模型的不足，Tone 提出了包含每个 DMU 各自价格的新的成本、收益和利润模型（Cooper William W, et al., 2007）<sup>①</sup>。这些模型的规划式详见表 4-46。关于各 DMU 生产要素价格不同时，成本效率等的分解方法参见文献 Cooper William W, et al. (2007)。

表 4-46 成本、收益、利润及收益/成本比值效率模型的规划式

	价格相同 (Type I)	价格不同 (Type II)
成本效率	$CE = \frac{cx^*}{cx_0}$ $cx^* = \min cx$ $\text{s. t. } x \geq X\lambda$ $y_0 \leq Y\lambda$ $\lambda \geq 0$	$CE = \frac{e\bar{x}^*}{e\bar{x}_0}$ $e\bar{x}^* = \min e\bar{x}$ $\text{s. t. } \bar{x} \geq \bar{X}\lambda$ $y_0 \leq Y\lambda$ $\lambda \geq 0$
收益效率	$RE = \frac{ry_0}{ry^*}$ $ry^* = \max ry$ $\text{s. t. } x_0 \geq X\lambda$ $y \leq Y\lambda$ $\lambda \geq 0$	$RE = \frac{e\bar{y}_0}{e\bar{y}^*}$ $e\bar{y}^* = \max e\bar{y}$ $\text{s. t. } x_0 \geq X\lambda$ $\bar{y} \leq \bar{Y}\lambda$ $\lambda \geq 0$

<sup>①</sup> 在 MaxDEA 软件中，传统的各 DMU 价格相同的成本效率等模型标为 Type I，各 DMU 价格不同的新的成本效率等模型标为 Type II。

续表

	价格相同 (Type I)	价格不同 (Type II)
利润效率	$PE = \frac{ry_0 - cx_0}{ry^* - cx^*}$ $ry^* - cx^* = \max ry - cx$ s. t. $x = X\lambda \leq x_0$ $y = Y\lambda \geq y_0$ $\lambda \geq 0$	$PE = \frac{e\bar{y}_0 - e\bar{x}_0}{e\bar{y}^* - e\bar{x}^*}$ $e\bar{y}^* - e\bar{x}^* = \max e\bar{y} - e\bar{x}$ s. t. $\bar{x} = \bar{X}\lambda \leq \bar{x}_0$ $\bar{y} = \bar{Y}\lambda \geq \bar{y}_0$ $\lambda \geq 0$
收益/成本 比值效率	$\frac{RE}{CE} = \frac{ry_0/cx_0}{ry^*/cx^*}$ $\frac{ry^*}{cx^*} = \max \frac{ry}{cx}$ s. t. $x = X\lambda \leq x_0$ $y = Y\lambda \geq y_0$ $\lambda \geq 0$	$\frac{RE}{CE} = \frac{e\bar{y}_0/e\bar{x}_0}{e\bar{y}^*/e\bar{x}^*}$ $\frac{e\bar{y}^*}{e\bar{x}^*} = \max \frac{e\bar{y}}{e\bar{x}}$ s. t. $\bar{x} = \bar{X}\lambda \leq \bar{x}_0$ $\bar{y} = \bar{Y}\lambda \geq \bar{y}_0$ $\lambda \geq 0$

$\bar{x}_{i,j}$  表示矩阵  $\bar{X}$  的元素:  $\bar{x}_{i,j} = c_{i,j} \times x_{i,j}$ ,  $c_{i,j}$  为  $x_{i,j}$  的价格。

$\bar{y}_{i,j}$  表示矩阵  $\bar{Y}$  的元素:  $\bar{y}_{i,j} = r_{i,j} \times y_{i,j}$ ,  $r_{i,j}$  为  $y_{i,j}$  的价格。

#### 4.7.2 MaxDEA 软件求解成本效率等模型的操作方法

求解成本效率等模型,除了投入和产出指标之外,在数据表中还要增加相应的价格指标。在 MaxDEA 软件中,各 DMU 价格相同的成本效率等模型标为 Type I,各 DMU 价格不同的成本效率等模型标为 Type II。两类模型的价格数据格式相同,区别在于 I 类模型的价格数据各 DMU 是相同的。各 DMU 价格不同时,也可以求解 I 类模型,只不过在模型中,除被评价 DMU 的价格信息外,其他 DMU 的价格信息被忽略。

在将数据导入 MaxDEA 软件后,在数据定义时价格指标保持“Not defined”不变(见图 4-61)。求解成本效率模型,必须设置投入的价格;求解收益效率模型,必须设置产出的价格;求解利润效率和收益/成本比值效率模型,则必须同时设置投入和产出的价格。

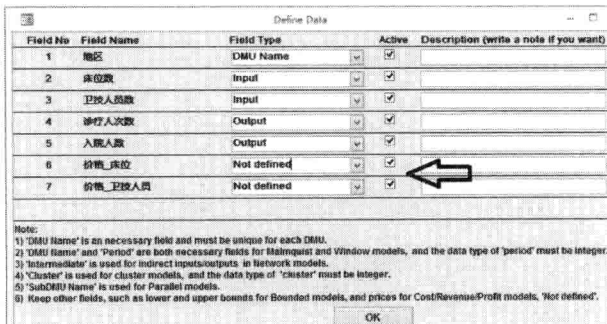


图 4-61 设置价格指标

选择要求解的模型，然后点击右侧的 Define 按钮，从下拉框中选择投入和（或）产出指标的价格变量（见图 4-62）。成本效率等模型不存在模型导向的选择问题，但可以选择规模收益类型。

Field Name	Field Type	Price Field
床位数	Input	价格_床位
卫技人员数	Input	
诊疗人次	Output	价格_床位
入院人数	Output	

Note:  
 1) Input price fields must be set for Cost models.  
 2) Output price field must be set for Revenue models.  
 3) Both input and output price fields must be set for Profit and Revenue/Cost Ratio models.  
 4) Prices of nondiscretionary or bounded inputs/outputs are optional.

图 4-62 选择投入和产出指标的价格变量

MaxDEA 软件在结果中没有提供配置效率，用户可根据需要进行计算，如分别运行投入导向径向 DEA 模型和成本模型（Type I），然后计算得到的成本效率与技术效率之比值即为配置效率。

## 第5章 超效率模型

在 DEA 模型的分析结果中，通常会出现多个 DMU 被评价为有效的情况。尤其是当投入和产出指标数量较多时，有效 DMU 数量也会较多。DEA 模型得出的效率值最大为 1，有效 DMU 效率值相同，这些有效 DMU 的效率高低无法进一步区分。为了解决这一问题，Andersen 和 Petersen (1993) 提出了对有效 DMU 进一步区分其有效程度的方法，这一方法后来被称为“超效率”模型 (Super Efficiency Model)。为便于表述，把前面介绍的模型称为标准效率模型 (Standard Efficiency Model)。超效率模型的核心就是将被评价 DMU 从参考集中剔除，也就是说，被评价 DMU 的效率是参考其他 DMU 构成的前沿得出的，有效 DMU 的超效率值一般会大于 1，从而可以对有效 DMU 进行区分。

在许多效率分析应用中，需要对效率的影响因素进一步分析。由于效率值最大为 1，被认为是截尾数据，所以在文献中多采用 Tobit 回归模型。超效率则不存在效率值的截尾问题，因此无须采用专门的处理截尾数据的 Tobit 回归模型。

虽然 Andersen 和 Petersen (1993) 提出的是径向超效率模型，但其原理同样适用于其他类型的距离函数，如 Tone K (2002) 提出的 SBM 超效率模型，Ray S C (2008) 提出的方向距离函数超效率模型等。

对于超效率模型的排序功能，Banker 和 Chang (2006) 通过数据模拟发现其对有效 DMU 的排序结果并不可靠，但是这并未影响超效率模型得到越来越多的应用。

超效率模型的其他常用功能包括：

- (1) 发现异常数据 (Banker & Chang, 2006; Wilson, 1995);
- (2) DEA 模型的敏感性和稳定性分析 (Boljuncic, 2006; Cooper W W, et al., 2001; Jahanshahloo, et al., 2005; Lotfi F Hosseinzadeh, et al., 2007; Zhu, 2001);
- (3) 广义 DEA (后面专门介绍);
- (4) 通过跨期比较，分析生产率的变动情况 (后面专门介绍)。

### 5.1 径向超效率模型

以投入导向 CRS 径向模型为例，超效率模型与标准效率模型的唯一区别就是增加了  $j \neq k$  这一限制条件，即从参考集中剔除被评价  $DMU_k$  (Andersen & Petersen, 1993)：

$$\begin{aligned}
 & \min \theta \\
 \text{s. t. } & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{ik} \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{rk} \\
 & \lambda \geq 0 \\
 & i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n (j \neq k)
 \end{aligned} \quad (5-1)$$

VRS 超效率模型就是在 CRS 模型的基础上增加约束  $\sum_{j=1, j \neq k}^n \lambda_j = 1$  :

$$\begin{aligned}
 & \min \theta \\
 \text{s. t. } & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{ik} \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{rk} \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j = 1 \\
 & \lambda \geq 0 \\
 & i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n (j \neq k)
 \end{aligned} \quad (5-2)$$

下面用图 5-1 来说明超效率模型的基本原理。以投入导向径向标准效率模型图示数据表 2-3 为例, 在标准效率模型中, A、B、C、D 四个有效 DMU 构成效率前沿。现在以分析 C 的超效率为例。C 的超效率是参考由除 C 以外的其他 DMU 构成的前沿, 即 ABD, C 在该前沿上的投影点为 C'。❶ 显然 C 的效率优于 C', C 与其投影点 C' 相比, 其效率超出的部分反映为 CC', 其超效率值  $\theta^* = OC'/OC \geq 1$ 。

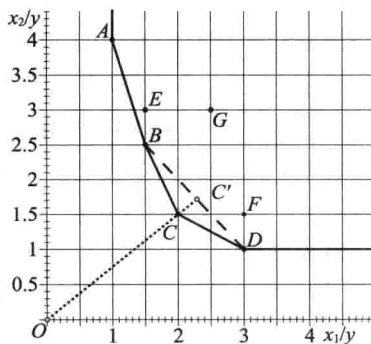


图 5-1 超效率模型示意图

对于有效 DMU 来说, 在投入导向的超效率模型中, 其径向投影方向是增加投入。在保持其他 DMU 投入和产出数值不变的条件下, 该有效 DMU 在等比例增加投入后 (增加比例为  $\theta^* - 1$ ), 仍将被评价为有效, 这是超效率模型用于敏感性和稳定性分析的基本原理。

❶ 注意超效率模型的投影点也可能位于标准效率模型的前沿上。例如, 假如在前沿上 AB 两点之间还有一个 DMU, 则该 DMU 的超效率投影点为其自身, 仍然位于标准效率模型的前沿上。



产出导向 CRS 超效率模型表示为

$$\begin{aligned}
 & \max \varphi \\
 \text{s. t. } & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_{ik} \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j y_{rj} \geq \varphi y_{rk} \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j = 1 \\
 & \lambda \geq 0 \\
 & i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n (j \neq k) \quad (5-3)
 \end{aligned}$$

虽然超效率模型是针对有效 DMU 而设计的, 但同样适用于无效 DMU。无效 DMU 的超效率径向模型与标准效率径向模型的结果相同。

## 5.2 方向距离函数超效率模型

与径向超效率模型的原理相同, 方向距离函数超效率模型也是在标准效率模型的基础上增加  $j \neq k$  这一限制条件构成的 (Ray S C, 2008)。

$$\begin{aligned}
 & \max \beta \\
 \text{s. t. } & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j x_{ij} + \beta g_{xi} \leq x_{ik} \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j y_{rj} - \beta g_{yr} \geq y_{rk} \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j b_{ij} - \beta g_{yt} \leq b_{ik} \\
 & \lambda \geq 0 \\
 & i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n (j \neq k) \quad (5-4)
 \end{aligned}$$

与径向超效率模型相同, 方向距离函数超效率模型也同样适用于无效 DMU。无效 DMU 的超效率模型与标准效率模型的结果相同。

## 5.3 SBM 超效率模型

与径向和方向距离函数超效率模型相比, SBM 超效率模型要复杂一点, 它并非仅仅是增加  $j \neq k$  这一限制条件 (Tone K, 2002)。SBM 超效率的规划式仅适用于有效 DMU, 对于 SBM 有效 DMU<sub>k</sub>, 其非导向 CRS SBM 超效率模型表示为

$$\min \rho_{SE} = \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{x}_i / x_{ik}}{\frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \bar{y}_r / y_{rk}}$$

$$\begin{aligned}
\text{s. t. } \bar{x}_i &\geq \sum_{j=1, j \neq k}^n x_{ij} \lambda_j \\
\bar{y}_r &\leq \sum_{j=1, j \neq k}^n y_{rj} \lambda_j \\
\bar{x}_i &\geq x_{ik} \\
\bar{y}_r &\leq y_{rk} \\
\lambda, s^-, s^+, \bar{y} &\geq 0 \\
i &= 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n (j \neq k) \quad (5-5)
\end{aligned}$$

由除 DMU<sub>k</sub> 之外的其他 DMU 构建的生产可能集为

$$\{(x, y) \mid x \geq \sum_{j=1, j \neq k}^n x_{ij} \lambda_j, y \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n y_{rj} \lambda_j\}$$

被评价 DMU<sub>k</sub> 在 SBM 超效率模型中的投影值  $(\bar{x}, \bar{y})$ ，即模型的最优解，是在由其他 DMU 构建的生产可能集内距离前沿最近的点。

为什么是距离前沿最近的点，而不是一定位于前沿上呢？

为了便于与 SBM 标准效率模型进行比较，我们对模型进行如下等价变换。

$$\begin{aligned}
\min \rho_{SE} &= \frac{1 + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_i^- / x_{ik}}{1 - \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s s_r^+ / y_{rk}} \\
\text{s. t. } \sum_{j=1, j \neq k}^n x_{ij} \lambda_j - s_i^- &\leq x_{ik} \\
\sum_{j=1, j \neq k}^n y_{rj} \lambda_j + s_r^+ &\geq y_{rk} \\
\lambda, s^-, s^+ &\geq 0 \\
i &= 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n (j \neq k) \quad (5-6)
\end{aligned}$$

VRS 超效率模型是在此基础上增加约束  $\sum_{j=1, j \neq k}^n \lambda_j = 1$ 。

为什么在 SBM 标准效率模型中，约束使用的是等号，而在超效率模型中使用的是不等号呢？

SBM 超效率模型得到的是被评价 DMU 距离由其他 DMU 构成的距前沿最近的点，因此 SBM 超效率模型的投影点有可能位于前沿的弱有效部分，在这种情况下，如果在 SBM 超效率模型的约束中使用等号，有可能会造成模型无可行解。

在此以 VRS SBM 超效率模型为例，如果在约束中使用等号，则模型为

$$\begin{aligned}
\min \rho_{SE} &= \frac{1 + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_i^- / x_{ik}}{1 - \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s s_r^+ / y_{rk}} \\
\text{s. t. } \sum_{j=1, j \neq k}^n x_{ij} \lambda_j - s_i^- &= x_{ik}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1, j \neq k}^n y_{rj} \lambda_j + s_r^+ &= y_{rk} \\ \sum_{j=1, j \neq k}^n \lambda_j &= 1 \\ \lambda, s^-, s^+ &\geq 0 \\ i &= 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n (j \neq k) \end{aligned} \quad (5-7)$$

令  $\hat{x} = \sum_{j=1, j \neq k}^n x_{ij} \lambda_j - s_i^-$ ,  $\hat{y} = \sum_{j=1, j \neq k}^n y_{rj} \lambda_j + s_r^+$ , 则  $(\hat{x}, \hat{y})$  的可行域为

$$\{(\hat{x}, \hat{y}) \mid \hat{x} \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n x_{ij} \lambda_j, \hat{y} \geq \sum_{j=1, j \neq k}^n y_{rj} \lambda_j, \sum_{j=1, j \neq k}^n \lambda_j = 1\}$$

如果  $DMU_k$  的某项投入大于其他  $DMU$ , 或者某项产出小于其他  $DMU$ , 即

$$x_{ik} > x_{ij}, j \neq k \text{ 或 } y_{rk} < y_{rj}, j \neq k,$$

则  $(x_k, y_k) \notin \{(\hat{x}, \hat{y}) \mid \hat{x} \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n x_{ij} \lambda_j, \hat{y} \geq \sum_{j=1, j \neq k}^n y_{rj} \lambda_j, \sum_{j=1, j \neq k}^n \lambda_j = 1\}$ , 即  $DMU_k$  不在  $(\hat{x}, \hat{y})$  的可行域范围内。

这是因为在  $\sum_{j=1, j \neq k}^n \lambda_j = 1$  约束下, 由  $x_{ik} > x_{ij}, j \neq k$  或  $y_{rk} < y_{rj}, j \neq k$  必然推导出

$$x_{ik} > \sum_{j=1, j \neq k}^n x_{ij} \lambda_j \text{ 或 } y_{rk} < \sum_{j=1, j \neq k}^n y_{rj} \lambda_j$$

这说明如果  $x_{ik} > x_{ij}, j \neq k$  或  $y_{rk} < y_{rj}, j \neq k$ , 则模型 (5-7) 无可行解。

以单投入单产出的 VRS 模型为例, 表 5-1 的数据分布如图 5-2 所示。C 的投入  $x$  数值比其他所有  $DMU$  都高, 如果采用模型 (5-7) 计算 C 的超效率,  $(\hat{x}, \hat{y})$  的可行域为图中阴影区域, C 不在该区域内, 所以模型无解。A 的产出  $y$  数值低于其他所有  $DMU$ , 如果采用模型 (5-7) 计算 C 的超效率, 也会无可行解。

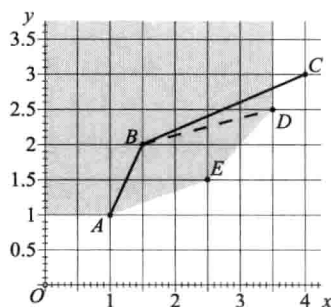


图 5-2 模型出现无可行解示意图

表 5-1 SBM 超效率模型示例数据

DMU	$x$	$y$
A	1.0	1.0
B	1.5	2.0
C	4.0	3.0
D	3.5	2.5
E	2.5	1.5

虽然以上讨论基于 VRS 模型, 但无解的问题不仅限于 VRS 模型, 在 CRS 模型中也会出现, 但其原因不像 VRS 模型这样易于解释。例如, 在 CRS SBM 超效

率模型中, 如果约束使用等号, 表 2-3 中的 A 无可行解<sup>①</sup>。

SBM 超效率模型 (5-6) 为非导向 SBM 超效率模型, 投入导向和产出的 SBM 超效率模型分别表示为

$$\begin{aligned} \min \rho_{SE} &= 1 + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_i^- / x_{ik} \\ \text{s. t. } &\sum_{j=1, j \neq k}^n x_{ij} \lambda_j - s_i^- \leq x_{ik} \\ &\sum_{j=1, j \neq k}^n y_{rj} \lambda_j \geq y_{rk} \\ &\lambda, s^-, s^+ \geq 0 \\ &i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n (j \neq k) \end{aligned} \quad (5-8)$$

$$\begin{aligned} \min \rho_{SE} &= \frac{1}{1 - \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s s_r^+ / y_{rk}} \\ \text{s. t. } &\sum_{j=1, j \neq k}^n x_{ij} \lambda_j \leq x_{ik} \\ &\sum_{j=1, j \neq k}^n y_{rj} \lambda_j + s_r^+ \geq y_{rk} \\ &\lambda, s^-, s^+ \geq 0 \\ &i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n (j \neq k) \end{aligned} \quad (5-9)$$

超效率 SBM 模型得到的是被评价 DMU 距离由其他 DMU 构成的前沿的最小距离, 其投影值并不一定是强有效, 因此超效率 SBM 模型可认为也是 MinDS 和 MinDW 模型的超效率求解模型。

## 5.4 超效率模型无可行解问题

投入导向和产出导向的 VRS 超效率模型会出现无可行解的问题, 这在一定程度上影响超效率模型的应用。在分析生产率变动的投入导向或产出导向的 VRS Malmquist 模型中同样会出现无可行解问题<sup>②</sup>。许多学者对此问题进行了深入研究, 并提出了一些解决方案。

### 5.4.1 VRS 超效率模型无可行解的原因

Seiford L M 和 Zhu (1999) 对 VRS 及 NIRS 和 NDRS 径向超效率模型无可行解问题进行了深入分析。投入导向和产出导向径向超效率模型无可行解的原因,

<sup>①</sup> 注意在下一节专门介绍 VRS 超效率模型的无解问题, 但该问题与现在讨论的不是同一个问题。后面介绍的 VRS 超效率模型的无解问题仅存在于投入导向和产出导向超效率模型中, 在非导向超效率模型中不存在无解问题。并且 VRS 超效率模型的无解问题不仅存在于投入导向和产出导向的 SBM 超效率模型中, 同样也存在于投入导向和产出导向的径向超效率模型和方向距离函数超效率模型中。

<sup>②</sup> 投入和产出导向的 NIRS 和 NDRS 超效率模型也会出现无可行解的问题, 在此以 VRS 超效率模型为例, 介绍无解问题产生原因及解决方法。VRS 模型的解决方法同样适用于 NIRS 和 NDRS 超效率模型。

同样适用于方向距离函数超效率模型和 SBM 超效率模型。

(1) 投入导向 VRS 超效率模型无可行解的充分必要条件。

投入导向 VRS 径向超效率模型规划式为

$$\begin{aligned}
 & \min \theta \\
 \text{s. t. } & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{ik} \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{rk} \\
 & \sum_{j=1, j \neq k}^n \lambda_j = 1 \\
 & \lambda \geq 0 \\
 & i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n (j \neq k) \quad (5-10)
 \end{aligned}$$

Seiford L M 和 Zhu (1999) 给出的投入导向 VRS 径向超效率模型 (5-10) 无可行解的充分必要条件是: 对于任意数值  $\eta \geq 1$ ,  $(\eta x_k, y_k)$  在投入导向标准效率模型中总是被评价为有效, 即  $\eta$  取任意大于或等于 1 的数值, 模型 (5-11) 的最优解总是  $\theta^* = 1$ 。也就是说, 无论  $DMU_k$  的投入数值增加至多高,  $DMU_k$  总是有效的。

$$\begin{aligned}
 & \min \theta \\
 \text{s. t. } & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta (\eta x_{ik}) \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{rk} \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\
 & \lambda \geq 0 \\
 & i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n \quad (5-11)
 \end{aligned}$$

Seiford L M 和 Zhu (1999) 给出的模型 (5-11) 无可行解的充分必要条件是间接条件, 不容易理解。下面给出一个模型 (5-11) 无可行解的充分非必要条件, 这更容易理解无可行解产生的原因: 如果  $DMU_k$  的某项产出大于任何其他  $DMU$ , 即  $y_{rk} > y_{rj}, j \neq k$ , 则模型 (5-10) 无可行解。

在  $\sum_{j=1, j \neq k}^n \lambda_j = 1$  约束下, 由  $y_{rk} > y_{rj}, j \neq k$  必然推导出  $y_{rk} > \sum_{j=1, j \neq k}^n y_{rj} \lambda_j$ , 从而使模型 (5-10) 中的约束条件  $\sum_{j=1, j \neq k}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{rk}$  不成立, 模型 (5-10) 无可行解。

以单投入、单产出的数据为例, 在图 5-3 中,  $K$  的产出数值最高, 在超效率模型中,  $K$  的投影区域为其上方阴影区域, 即在保持产出不减少的条件下, 投入可不变、减少或增加。如果投影方向为投入减少表示  $K$  的无效率, 投入增加表

示  $K$  的超效率。 $K$  为有效 DMU，其投影方向应该沿图中点线方向所示，向右侧投影，即增加投入。但是， $K$  的投影区域与由其他 DMU 构建的生产可能集区域（下方的阴影区域）没有重叠， $K$  不能投影至由其他 DMU 构建的生产可能集区域，模型无解。

从图中可以直观地观察到，在标准效率模型中，在产出数量不变的条件下，无论  $K$  的投入数值增加多少（向右侧平移）， $K$  总是位于前沿上（总是有效的）。这意味着在标准效率模型中，只要一个 DMU 的某项产出数量超过其他 DMU，那么无论其投入数量有多高（投入如何无效率），在投入导向的 VRS 标准效率模型中总是被评价为有效。

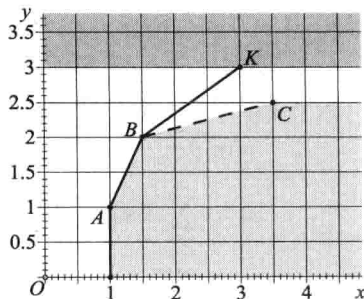


图 5-3 投入导向超效率模型  
无可行解示意图

那么无论其投入数量有多高（投入如何无效率），在投入导向的 VRS 标准效率模型中总是被评价为有效。

(2) 产出导向 VRS 超效率模型无可行解的充分必要条件。

产出导向 VRS 超效率径向模型表示为

$$\begin{aligned}
 & \max \varphi \\
 \text{s. t. } & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_{ik} \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j y_{rj} \geq \varphi y_{rk} \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j = 1 \\
 & \lambda \geq 0 \\
 & i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n (j \neq k) \quad (5-12)
 \end{aligned}$$

Seiford L M 和 Zhu (1999) 给出的产出导向 VRS 径向超效率模型 (5-12) 无可行解的充分必要条件是：对于任意数值  $0 < \gamma \leq 1$ ， $(x_k, \gamma y_k)$  在产出导向标准效率模型中总是被评价为有效，即  $\gamma$  取任意小于或等于 1 的正数，模型 (5-13) 的最优解总是  $\varphi^* = 1$ 。也就是说，无论 DMU<sub>k</sub> 的产出数值减少至多低，DMU<sub>k</sub> 总是有效的。

$$\begin{aligned}
 & \min \varphi \\
 \text{s. t. } & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_{ik} \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq \varphi (\gamma y_{rk}) \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\
 & \lambda \geq 0
 \end{aligned}$$

$$i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n \quad (5-13)$$

产出导向 VRS 径向超效率模型 (5-12) 无可行解的一个充分非必要条件是: 如果 DMU<sub>k</sub> 的某项投入小于其他 DMU, 即  $x_{ik} < x_{ij}, j \neq k$ , 则模型 (5-12) 无可行解。

在  $\sum_{j=1, j \neq k}^n \lambda_j = 1$  约束下, 由  $x_{ik} < x_{ij}, j \neq k$  必然推导出  $x_{ik} < \sum_{j=1, j \neq k}^n \lambda_j x_{ij}$ 。从而使模型中 (5-12) 的约束条件  $\sum_{j=1, j \neq k}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_{ik}$  不成立, 模型 (5-12) 无可行解。

同样以单投入、单产出的数据为例, 在图 5-4 中, K 的投入数值最低, 在超效率模型中, K 的投影区域为其左侧的阴影区域, 即在保持投入不增加条件下, 产出可不变、减少或增加。如果投影方向为产出增加表示 K 的无效率, 产出减少表示 K 的超效率。K 为有效 DMU, 正常情况下, 其投影方向应该沿图中点线方向向下方投影, 即减少产出。但是, K 的投影区域与由其他 DMU 构建的生产可能集区域 (右侧的阴影区域) 没有重叠, K 不能投影至由其他 DMU 构建的生产可能集区域, 模型无解。

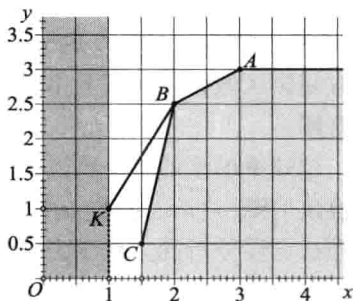


图 5-4 产出导向超效率模型  
无可行解示意图

从图中可以直观地观察到, 在标准效率模型中, 在投入数量不变的条件下, 无论 K 的产出数值减少多少 (向下方平移), K 总是位于前沿上 (总是有效的)。这意味着在标准效率模型中, 只要一个 DMU 的某项投入数量少于其他 DMU, 那么无论其产出数量有多低 (产出如何无效率), 在产出导向的 VRS 标准效率模型中总是被评价为有效。<sup>①</sup>

在投入导向超效率模型无解的情况下, 可以使用产出导向超效率模型作为替代, 反之亦然。但是, 存在投入导向和产出导向超效率模型同时都无可行解的情况, 如被评价 DMU 的某项产出是最高的, 同时其某项投入又是最低的。所以探索超效率模型无可行解的方法一直是 DEA 研究热点问题之一。

针对超效率无解问题, Chen J-X 等人 (2011) 提出了下面的一种解决方案, 针对有效 DMU<sub>k</sub>, 其超效率模型为

$$\begin{aligned} & \min \frac{\theta}{\varphi} \\ & \text{s. t. } \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{ik} \end{aligned}$$

① 在有些文献中, 将超效率模型无可行解的 DMU 称为极端有效 (Extremely Efficient) DMU, 通过上分析可以看出, 这个名称并不恰当。

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j y_{rj} &\geq \varphi y_{rk} \\ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j &= 1 \\ \theta &\geq 1, 0 < \varphi \leq 1 \\ \lambda &\geq 0 \\ i &= 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n (j \neq k) \end{aligned} \quad (5-14)$$

模型 (5-14) 允许被评价  $K$  通过同时增加投入和减少产出来投影到由其他 DMU 构成的前沿上。以图 5-5 为例, 采用模型 (5-14),  $K$  的投影区域为其右下方阴影区域, 该区域与由其他 DMU 构成的生产可能集存在交叉区域, 因此模型有解。

超效率模型的一个特点是用有效 DMU 的投影点 (投入增加和/或产出减少) 替换该 DMU 之后, 投影点在标准效率模型中为有效。这是超效率模型进行敏感性和稳定性分析的方法学基础。但是, 由于在模型 (5-14) 中有效 DMU 的投影方向只能是增加投入和 (或) 减少产出 ( $\theta \geq 1, 0 < \varphi \leq 1$ ), 当  $K$  的投入超过  $C$  时 (见图 5-6),  $K$  的投影点为  $K'$ , 模型不允许  $K'$  通过减少投入投影至  $C$ 。  $K'$  并不位于由其他 DMU 构成的前沿上 ( $K'$  为无效 DMU), 如果用  $K$  的投影值  $K'$  替换  $K$ , 在标准效率模型中  $K'$  为无效 DMU。这是非导向超效率模型存在的一个共同缺陷。前面提到过非导向 SBM 超效率模型也存在这个问题。

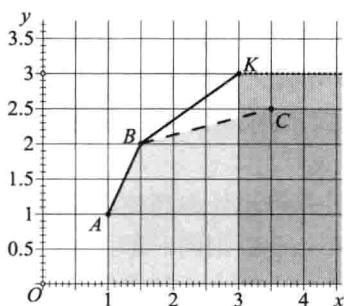


图 5-5 非导向超效率模型示意图

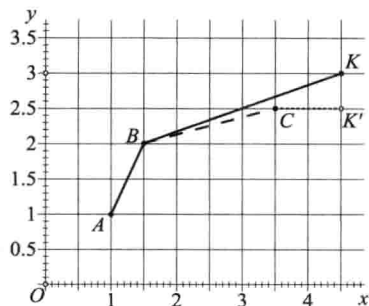


图 5-6 非导向超效率模型缺陷示意图

VRS 超效率模型无可行解的问题只存在于投入导向和产出导向的模型中, 所以实际上, Chen J-X 等人 (2011) 只是提出了非导向径向超效率模型, 可作为投入导向或产出导向超效率模型无解时的一种替代, 并没有解决无解的问题。因此, 对这一方法不深入讨论。

解决投入导向和产出导向 VRS 超效率模型无可行解问题的方案, 应该是在保留其投入导向或产出导向特征的前提下, 解决无可行解的问题。在已有文献



中,符合这一要求的是 Cook W D 等人 (2009) 提出的解决方案<sup>①</sup>。另外, Lee 等人 (2011) 提出了一种两阶段方法<sup>②</sup>, 思路与 Cook W D 等人 (2009) 类似, 虽然其针对的问题是径向 VRS 超效率模型无可行解的问题, 但是给出的无可行解 DMU 的超效率值的定义却是非径向的 (类似 SBM 效率值的定义), 也就是说答案与问题不符。

#### 5.4.2 VRS 超效率模型无可行解的解决方法一

(1) 投入导向 VRS 模型无可行解的解决方法。

针对无可行解的 DMU<sub>k</sub>, Cook W D 等人 (2009) 提出的有可行解的投入导向超效率模型为

$$\begin{aligned} & \min \tau + M \times \beta \\ & \text{s. t. } \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j x_{ij} \leq (1 + \tau) x_{ik} \\ & \quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j y_{rj} \geq (1 - \beta) y_{rk} \\ & \quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j = 1 \\ & \quad \beta \geq 0, \lambda_j \geq 0 \\ & \quad i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n (j \neq k) \end{aligned} \quad (5-15)$$

$M$  是一个足够大的正数。Cook W D 等人 (2009) 把 DMU<sub>k</sub> 的超效率值定义为  $1 + \tau^* + 1/(1 - \beta^*)$ 。

模型 (5-15) 的基本原理为: 首先允许 DMU<sub>k</sub> 的产出以尽可能小的比例减少 (减少的比例为  $\beta$ ), 以达到使  $\sum_{j=1, j \neq k}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{rk}$  成立的目的, 从而使模型有可行解, 然后再通过投入增加的比例 ( $\tau$ ) 来测量投入的超效率。

(2) 产出导向 VRS 模型无可行解的解决方法。

针对无可行解的 DMU<sub>k</sub>, Cook W D 等人 (2009) 提出的有可行解的产出导向超效率模型为

$$\begin{aligned} & \min \gamma + M \times \delta \\ & \text{s. t. } \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j x_{ij} \leq (1 + \delta) x_{ik} \\ & \quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j y_{rj} \geq (1 - \gamma) y_{rk} \end{aligned}$$

① 此解决方案也可参见博士论文: 查勇. 数据包络分析中的若干问题研究 [D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2008。

② Chen Y & Liang (2011) 给出了等价的单阶段求解方法。

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j = 1$$

$$\delta \geq 0, \lambda_j \geq 0$$

$$i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n (j \neq k) \quad (5-16)$$

Cook W D 等人 (2009) 把  $DMU_k$  的超效率值定义为  $1 + \delta^* + 1/(1 - \gamma^*)$ 。

(3) Cook W D 等人 (2009) 解决方案的优点。

Cook W D 等人 (2009) 提出了一种解决投入 (产出) 导向 VRS 超效率模型无可行解问题的很好的思路, 这个方案在获得可行解的同时, 保留了模型的投入 (产出) 导向特征, 尽可能通过投入增加 (产出减少) 的比例来测量超效率, 产出的减少 (投入的增加) 仅仅是达到使模型有可行解的目的。

另外, 在投入导向模型 (5-15) 中,  $\tau$  取值范围没有被限制, 可以是正数也可以是负数。因此, 在图 5-6 中, 模型 (5-15) 得出的  $K$  的投影点为  $C$ ,  $C$  位于由除  $K$  之外其他  $DMU$  构成的前沿上。如果用得出的投影点  $C$  替换  $DMU K$  之后,  $C$  在标准效率模型中为有效  $DMU$ 。同样产出导向模型 (5-16) 得出的投影点也符合这一特征。

\* (4) Cook W D 等人 (2009) 解决方案的缺陷。

以投入导向为例来说明 Cook W D 等人 (2009) 解决方案中存在的问题, 类似问题同样存在于产出导向模型解决方案中。

首先, 对于有可行解的  $DMU$ , 超效率值计算公式  $1 + \tau^* + 1/(1 - \beta^*)$  不适用。

Cook W D 等人 (2009) 提出的解决无可行解问题的模型 (5-15) 也适用于求解有可行解的有效  $DMU$  的超效率 (此时  $\beta^* = 0$ ), 其超效率值应等于  $1 + \tau^*$  (不存在产出超效率), 但是按照公式  $1 + \tau^* + 1/(1 - \beta^*)$  计算得出的超效率为  $1 + \tau^* + 1/(1 - \beta^*) = 2 + \tau^*$ 。因此, 其超效率值计算公式  $1 + \tau^* + 1/(1 - \beta^*)$  并不适用于有可行解的  $DMU$ ①。

其次, 超效率值计算公式  $1 + \tau^* + 1/(1 - \beta^*)$  与投入导向不符。

对于无可行解的  $DMU$ , 超效率值计算公式  $1 + \tau^* + 1/(1 - \beta^*)$  由两部分构成,  $1 + \tau^*$  代表投入超效率,  $1/(1 - \beta^*)$  代表产出超效率, 这与投入导向模型的特征不符。投入导向模型仅从投入的角度衡量效率 (或无效率), 从这点讲, 应该被称为投入优先非导向模型, 而不是投入导向模型。

在标准效率模型中, 也可以定义类似的模型。

$$\max M \times \tau + \beta$$

① 从这点看, 似乎说明超效率值计算公式  $1 + \tau^* + 1/(1 - \beta^*)$  应该为超效率值计算公式  $\tau^* + 1/(1 - \beta^*)$  或  $\frac{1 + \tau^*}{1/(1 - \beta^*)}$ , 但是在这样修改之后, 计算得出的超效率值有可能小于 1, 与被评价  $DMU$  为有效  $DMU$  相矛盾。

$$\begin{aligned}
 \text{s. t. } & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq (1 - \tau) x_{ik} \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq (1 + \beta) y_{rk} \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\
 & \beta \geq 0, \lambda_j \geq 0 \\
 & i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n (j \neq k) \quad (5-17)
 \end{aligned}$$

模型(5-17)的最优解有可能出现 $\beta^* > 0$ ，表示在投入不能继续等比例减少时(投入已经减少的比例为 $\alpha^*$ )，产出还可以等比例增加(增加的比例为 $\beta^*$ )。

以Cook W D等人(2009)文中所用的数据为例(该文中的Table 1)<sup>①</sup>，求解模型(5-17)，结果中出现两例 $\beta^* > 0$ (见表5-2)。投入导向模型的效率值 $\theta^* = 1 - \alpha^*$ ，效率值中不包含产出无效率的部分 $\beta^*$ 。

表5-2 投入导向优先非导向模型结果示例

序号	DMU名称	投入导向模型效率值( $\theta^*$ )	$\alpha^*$	$\beta^*$
D19	JAPAN TOBACCO	0.9808	0.0192	0.0200
D20	MITSUBISHI ELECTRIC CORP.	0.5218	0.4782	0.0422

由此可见，Cook W D等人(2009)提出的超效率模型并非是投入导向超效率模型，而是投入导向优先的非导向超效率模型<sup>②</sup>。

最后，超效率值计算公式 $1 + \tau^* + 1/(1 - \beta^*)$ 得出的结果不合理。

在图5-7中，假设 $K$ 处于 $K_1$ 位置，即投入数值与 $C$ 相同，模型得出的 $K$ 的投影点为 $C$ ， $K_1$ 的超效率值 $= 1 + \tau^* + 1/(1 - \beta^*) = 1 + 1/(1 - \beta^*)$ 。但是， $K_1$ 与 $C$ 相比，投入数值相等，即 $K_1$ 不存在投入的超效率，其超效率仅包括产出超效率，应该等于 $1/(1 - \beta^*) > 1$ 。

假设 $K$ 处于 $K_2$ 位置，即投入数值比 $C$ 高，模型(5-15)得出的 $K$ 的投影点仍然为 $C$ ， $K_2$ 的超效率值 $= 1 + \tau^* + 1/(1 - \beta^*)$ 。但是， $K_2$ 与 $C$ 相比，投入数值要高，此时 $\tau^* < 0$ ，即 $K_2$ 不仅不存在投入的超效率，反而是存在投入的无效率，其综合超效率

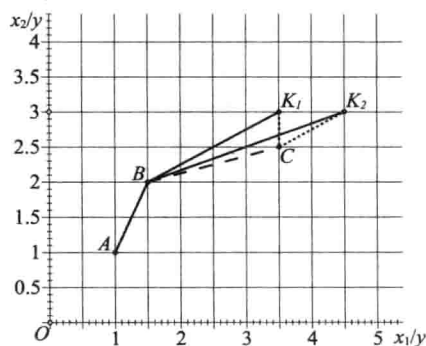


图5-7 Cook W D等人(2009)超效率值存在的问题示例

① 该数据引用自Chen Y. (2004)。

② 从这个角度考虑，似乎说明超效率值计算公式 $1 + \tau^* + 1/(1 - \beta^*)$ 应该改为 $1 + \tau^*$ ，但是在这样修改之后，计算得出的超效率值有可能小于1( $\tau^*$ 有可能小于0)，与被评价DMU为有效DMU相矛盾。

应该等于产出超效率 - 投入无效率, 即其超效率应该小于  $1/(1 - \beta^*)$  ①。而根据  $1 + \tau^* + 1/(1 - \beta^*)$  计算得出的超效率值却是在产出超效率的基础上增加了投入超效率部分  $1 + \tau^* > 0$ 。

另外, 通过观察超效率模型的示意图 (见图 5-8), 可以得出以下规律: 一个有效 DMU 的超效率值等于其超效率模型投影点的标准效率值的倒数, 即如果将一个有效 DMU 的超效率模型投影点作为一个新的 DMU 加入到数据集中, 在标准效率模型中, 投影点的效率值与该有效 DMU 的超效率值互为倒数。在图 5-8 中, C 的超效率值 =  $OC'/OC$ , 而投影点 C' 的标准效率值为  $OC/OC'$ , 显然二者为倒数关系。

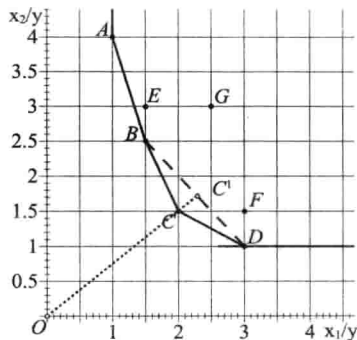


图 5-8 超效率模型示意图

Cook W D 等人 (2009) 的解决方案得出的无可行解 DMU 的超效率值并不符合这一特点。

通过以上分析, 可以得出, Cook W D 等人 (2009) 提出的 VRS 超效率模型无可行解的解决方案, 虽然得出了合理的投影值, 但是其超效率值的计算公式存在缺陷。

非导向 VRS 超效率模型不存在无可行解, 根据这一特点, 结合 Cook W D 等人 (2009) 提出的解决思路, 可以对 DEA 模型的导向问题进行一般化处理, 从而解决 VRS 超效率模型无可行解的问题。

### \* 5.4.3 VRS 超效率模型无可行解的解决方法二

#### (1) 一般化导向模型。

首先给出 Chen J-X 等人 (2011) 非导向 VRS 径向模型的等价形式。

$$\begin{aligned}
 & \min \frac{1 - \alpha}{1 + \beta} \\
 \text{s. t. } & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq (1 - \alpha) x_{ik} \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq (1 + \beta) y_{rk} \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\
 & \alpha, \beta, \lambda_j \geq 0 \\
 & i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned} \tag{5-18}$$

DMU<sub>k</sub> 的效率值为  $(1 - \alpha^*) / (1 + \beta^*)$ , 其中  $\alpha^*$  代表投入等比例缩减的程度,  $\beta^*$  代表产出等比例增加的程度。

① 在产出导向超效率模型中, 超效率值为  $1/\phi^* > 1$ , 相当于此处的  $1/(1 - \beta^*) > 1$ 。

如果  $K$  为有效 DMU, 其超效率模型表示为

$$\begin{aligned} & \min \frac{1 - \alpha}{1 + \beta} \\ & \text{s. t. } \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j x_{ij} \leq (1 - \alpha) x_{ik} \\ & \quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j y_{rj} \geq (1 + \beta) y_{rk} \\ & \quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j = 1 \\ & \quad \alpha \leq 0, \beta \leq 0, \lambda_j \geq 0 \\ & \quad i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n (j \neq k) \end{aligned} \quad (5-19)$$

$K$  的超效率值为  $(1 - \alpha^*) / (1 + \beta^*)$ , 其中  $-\alpha^*$  代表投入等比例增加的程度,  $-\beta^*$  代表产出等比例减少的程度。

模型 (5-18) 可以通过同时减少投入并增加产出来投影至前沿, 超效率模型 (5-19) 允许通过同时增加投入并减少产出来投影至由其他 DMU 构成的前沿, 这两个模型属于非导向模型, 其中超效率 VRS 模型 (5-19) 不存在无可行解的问题。

在模型 (5-18) 和 (5-19) 的目标函数的分子和分母上增加两个参数, 可以建立一个一般化导向的模型。通过设置不同的参数值, 可以使一般化导向模型分别等价于投入导向、产出导向和非导向模型, 并实现几种新的导向类型。一般化导向 VRS 径向模型表示为

$$\begin{aligned} & \min \frac{1 - w^I \alpha}{1 + w^O \beta} \\ & \text{s. t. } \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq [1 - f(w^I) \alpha] x_{ik} \\ & \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq [1 + f(w^O) \beta] y_{rk} \\ & \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\ & \quad \alpha, \beta, \lambda_j \geq 0 \\ & \quad i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n \\ & \quad w^I + w^O > 0, w^I \geq 0, w^O \geq 0 \\ & \quad f(w) = \begin{cases} 0, & \text{if } w = 0 \\ 1, & \text{if } w > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (5-20)$$

其中  $w^I$  和  $w^O$  为模型的两个参数, 分别表示投入导向和产出导向的权重, 其中至少有一个参数不等于 0。  $K$  的效率值为  $(1 - \alpha) / (1 + \beta)$ 。

如果  $K$  为有效 DMU, 其超效率模型表示为

$$\begin{aligned}
 & \min \frac{1 - w^l \alpha}{1 + w^o \beta} \\
 \text{s. t. } & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j x_{ij} \leq [1 - f(w^l) \alpha] x_{ik} \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j y_{rj} \geq [1 + f(w^o) \beta] y_{rk} \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j = 1 \\
 & \alpha \leq 0, \beta \leq 0, \lambda_j \geq 0 \\
 & i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n (j \neq k) \\
 & w^l + w^o > 0, w^l \geq 0, w^o \geq 0 \\
 & f(w) = \begin{cases} 0, & \text{if } w = 0 \\ 1, & \text{if } w > 0 \end{cases} \quad (5-21)
 \end{aligned}$$

当参数  $w^l$  和  $w^o$  均大于 0 时, VRS 超效率模型不存在无可行解的问题。

表 5-3 列出了一般化导向模型的 7 种特例, 其中前 3 种特例等价于投入导向模型、产出导向模型和非导向模型。

表 5-3 一般化导向模型的 7 种特例 (径向模型)

序号	模型导向	标准效率模型				超效率模型			
		$w^l$	$w^o$	目标函数	效率值	$w^l$	$w^o$	目标函数	效率值
1	投入导向	1	0	$1 - \alpha$	$1 - \alpha^*$	1	0	$1 - \alpha$	$1 - \alpha^*$
2	产出导向	0	1	$\frac{1}{1 + \beta}$	$\frac{1}{1 + \beta^*}$	0	1	$\frac{1}{1 + \beta}$	$\frac{1}{1 + \beta^*}$
3	非导向	1	1	$\frac{1 - \alpha}{1 + \beta}$	$\frac{1 - \alpha^*}{1 + \beta^*}$	1	1	$\frac{1 - \alpha}{1 + \beta}$	$\frac{1 - \alpha^*}{1 + \beta^*}$
4	调整投入导向	1	$\varepsilon$	$\frac{1 - \alpha}{1 + \varepsilon \beta}$	$1 - \alpha^*$	$\varepsilon^{\text{①}}$	1	$\frac{1 - \varepsilon \alpha}{1 + \beta}$	$1 - \alpha^*$
5	调整产出导向	$\varepsilon$	1	$\frac{1 - \varepsilon \alpha}{1 + \beta}$	$\frac{1}{1 + \beta^*}$	1	$\varepsilon$	$\frac{1 - \alpha}{1 + \varepsilon \beta}$	$\frac{1}{1 + \beta^*}$
6	投入优先非导向	1	$\varepsilon$	$\frac{1 - \alpha}{1 + \varepsilon \beta}$	$\frac{1 - \alpha^*}{1 + \beta^*}$	$\varepsilon$	1	$\frac{1 - \varepsilon \alpha}{1 + \beta}$	$\frac{1 - \alpha^*}{1 + \beta^*}$
7	产出优先非导向	$\varepsilon$	1	$\frac{1 - \varepsilon \alpha}{1 + \beta}$	$\frac{1 - \alpha^*}{1 + \beta^*}$	1	$\varepsilon$	$\frac{1 - \alpha}{1 + \varepsilon \beta}$	$\frac{1 - \alpha^*}{1 + \beta^*}$

①  $\varepsilon$  为非阿基米德无穷小, 实际应用中可以设置为一个较小的正数, 如 0.0001。

特例 1: 投入导向模型。

在特例 1 中,  $w^l = 1, w^o = 0$ , 等价于投入导向模型 (2-13)

$$\begin{aligned}
 & \min 1 - \alpha \\
 \text{s. t. } & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq (1 - \alpha) x_{ik}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{rk} \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\
 & \alpha, \lambda_j \geq 0 \\
 & i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned} \tag{5-22}$$

其超效率模型等价于投入导向超效率模型 (5-2)

$$\begin{aligned}
 & \min 1 - \alpha \\
 \text{s. t. } & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j x_{ij} \leq (1 - \alpha) x_{ik} \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{rk} \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j = 1 \\
 & \alpha \leq 0, \lambda_j \geq 0 \\
 & i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n (j \neq k)
 \end{aligned}$$

特例2: 产出导向模型。

在特例2中,  $w^1 = 0, w^0 = 1$ , 等价于产出导向模型 (2-15)

$$\begin{aligned}
 & \min \frac{1}{1 + \beta} \\
 \text{s. t. } & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_{ik} \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq (1 + \beta) y_{rk} \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\
 & \beta, \lambda_j \geq 0 \\
 & i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned} \tag{5-23}$$

其超效率模型等价于产出导向超效率模型 (5-3)

$$\begin{aligned}
 & \min \frac{1}{1 + \beta} \\
 \text{s. t. } & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_{ik} \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j y_{rj} \geq (1 + \beta) y_{rk} \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j = 1
 \end{aligned}$$

$$\beta \leq 0, \lambda_j \geq 0$$

$$i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n (j \neq k)$$

特例 3: 非导向模型。

在特例 3 中,  $w^I = 1, w^O = 1$ , 等价于非导向模型 (5-18) 和 (5-19)。在此不再重复。

特例 4: 调整投入导向模型。

在特例 4 的标准效率模型中  $w^I = 1, w^O = \varepsilon$ , 即

$$\min \frac{1 - \alpha}{1 + \varepsilon\beta}$$

$$\text{s. t. } \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq (1 - \alpha)x_{ik}$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq (1 + \beta)y_{rk}$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$\alpha, \beta, \lambda_j \geq 0$$

$$i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n \quad (5-24)$$

模型 (5-24) 的意义为, 被评价  $DMU_k$  的投影方向优先等比例减少投入, 即最大化  $\alpha$ , 当投入不能继续等比例减少时, 再转为等比例增加产出 (如果可能), 即最大化  $\beta$ , 所以说模型 (5-24) 为投入优先非导向模型。但是,  $DMU_k$  的效率值定义为  $(1 - \alpha^*)$ , 只包含投入无效率部分 (投入等比例缩减的程度  $\alpha^*$ ), 不包含可能存在的产出无效率部分 (产出等比例增加的程度  $\beta^*$ )<sup>①</sup>。因此, 将模型 (5-24) 称为调整投入导向模型, 其标准效率模型与投入导向的标准效率模型的结果相同, 在应用中没有特别的用途。调整投入导向模型的作用体现在其超效率模型中。

在特例 4 的超效率模型中  $w^I = \varepsilon, w^O = 1$ , 即如果  $K$  为有效  $DMU$ , 其超效率模型表示为

$$\min \frac{1 - \varepsilon\alpha}{1 + \beta}$$

$$\text{s. t. } \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j x_{ij} \leq (1 - \alpha)x_{ik}$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j y_{rj} \geq (1 + \beta)y_{rk}$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j = 1$$

① 在实际应用中, 大部分  $DMU$  的结果为  $\beta^* = 0$ 。



$$\alpha \leq 0, \beta \leq 0, \lambda_j \geq 0$$

$$i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n (j \neq k) \quad (5-25)$$

超效率模型(5-25)的意义:被评价 DMU<sub>k</sub> 向由其他 DMU 构成的前沿上的投影方向为,首先以尽可能小的比例减少产出(如果必须减少产出模型才有可行解),即最大化 $\beta$ ( $\beta$ 的最大值为0),然后再以最小的比例增加投入,即最大化 $\alpha$ ( $\alpha$ 最大值为0)。因为首先保证的是产出减少的比例最小(多数 DMU 的结果为产出不变,即 $\beta^* = 0$ ),所以 DMU<sub>k</sub> 的投影以投入增加为优先方向,模型仍然为投入优先非导向模型。但是,DMU<sub>k</sub> 的效率值定义为 $(1 - \alpha^*)$ ,只包含投入超效率部分(投入等比例增加的程度为 $|\alpha^*|$ ),不包含可能存在的产出超效率部分(产出等比例减少的程度为 $|\beta^*|$ )<sup>①</sup>。因此,将超效率模型(5-25)称为调整投入导向超效率模型。在调整投入导向超效率模型中,参数 $w^I$ 和 $w^O$ 均大于0,不会出现无可行解的问题,这是调整投入导向超效率模型的主要用途。

当超效率模型(5-25)的最优解为 $\beta^* = 0$ 时,与传统的投入导向的超效率模型(5-2)等价,此时 DMU<sub>k</sub> 在传统的投入导向的超效率模型中有可行解。

特例5:调整产出导向模型。

在特例5的标准效率模型中 $w^I = \varepsilon, w^O = 1$ ,即

$$\begin{aligned} \min & \frac{1 - \varepsilon\alpha}{1 + \beta} \\ \text{s. t.} & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq (1 - \alpha)x_{ik} \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq (1 + \beta)y_{rk} \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\ & \alpha, \beta, \lambda_j \geq 0 \\ & i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (5-26)$$

模型(5-26)的意义为,被评价 DMU<sub>k</sub> 的投影方向为优先等比例增加产出,即最大化 $\beta$ ,当产出不能继续等比例增加时,再转为等比例减少投入(如果可能),即最大化 $\alpha$ ,所以说模型(5-26)为产出优先非导向模型。但是,DMU<sub>k</sub> 的效率值定义为 $1/(1 + \beta^*)$ ,只包含产出无效率部分(产出等比例增加的程度 $\beta^*$ ),不包含可能存在的投入无效率部分(投入等比例缩减的程度 $\alpha^*$ )<sup>②</sup>。因此,将模型(5-26)称为调整产出导向模型,其标准效率模型与产出导向的标准效率模型的结果相同,在应用中没有特别的用途。调整产出导向模型的作用体现在其超效率模型中。

在特例5的超效率模型中 $w^I = 1, w^O = \varepsilon$ ,即如果 $K$ 为有效 DMU,其超效率

① 在实际应用中,大部分 DMU 的结果为 $\beta^* = 0$ 。

② 在实际应用中,大部分 DMU 的结果为 $\alpha^* = 0$ 。

模型表示为

$$\begin{aligned}
 & \min \frac{1 - \alpha}{1 + \varepsilon\beta} \\
 & \text{s. t. } \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j x_{ij} \leq (1 - \alpha) x_{ik} \\
 & \quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j y_{rj} \geq (1 + \beta) y_{rk} \\
 & \quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j = 1 \\
 & \quad \alpha \leq 0, \beta \leq 0, \lambda_j \geq 0 \\
 & \quad i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n (j \neq k) \quad (5-27)
 \end{aligned}$$

超效率模型 (5-27) 的意义: 被评价 DMU<sub>k</sub> 向由其他 DMU 构成的前沿投影的方向为, 首先以尽可能小的比例增加投入 (如果必须增加投入模型才有可行解), 即最大化  $\alpha$  ( $\alpha$  最大值为 0), 然后再以最小的比例减少产出, 即最大化  $\beta$  ( $\beta$  的最大值为 0)。因为首先保证的是投入增加的比例最小 (多数 DMU 的结果为投入不变, 即  $\alpha^* = 0$ ), 所以 DMU<sub>k</sub> 的投影以产出减少为优先方向, 模型 (5-27) 仍然为产出优先非导向模型。但是, DMU<sub>k</sub> 的效率值定义为  $1 / (1 + \beta^*)$ , 只包含产出超效率部分 (产出等比例减少的程度为  $|\beta^*|$ ), 不包含可能存在的投入超效率部分 (投入等比例缩减的程度为  $|\alpha^*|$ )<sup>①</sup>。因此, 将超效率模型 (5-27) 称为调整产出导向超效率模型。在调整产出导向超效率模型中, 参数  $w^l$  和  $w^o$  均大于 0, 不会出现无可行解的问题, 这是调整产出导向超效率模型的主要用途。

当超效率模型 (5-27) 的最优解为  $\alpha^* = 0$  时, 与传统的产出导向的超效率模型 (5-3) 等价, 此时 DMU<sub>k</sub> 在传统的产出导向的超效率模型中有可行解。

特例 6: 投入优先非导向模型。

特例 6 与特例 4 模型相同, 但效率值包含产出无效率 (或超效率) 部分, 因此称为投入优先非导向模型。

特例 7: 产出优先非导向模型。

特例 7 与特例 5 模型相同, 但效率值包含投入无效率 (或超效率) 部分, 因此称为产出优先非导向模型。

(2) 一般化导向模型应用于非径向距离。

一般化导向模型的思路不仅适用于径向模型, 同样适用于非径向模型, 包括方向距离函数模型、SBM 模型和混合距离函数模型。另外, 前面介绍的求解投入和产出导向 MinDS 模型的方法采用的也是调整投入导向和调整产出导向的原理。

① 在实际应用中, 大部分 DMU 的结果为  $\alpha^* = 0$ 。

一般化导向 VRS SBM 模型表示为

$$\min \rho = \frac{1 - w^l \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_i^- / x_{ik}}{1 + w^o \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s s_r^+ / y_{rk}}$$

$$\text{s. t. } \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + s_i^- = x_{ik}$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - s_r^+ = y_{rk}$$

$$\lambda, s^-, s^+ \geq 0$$

$$i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n$$

$$w^l + w^o > 0, w^l \geq 0, w^o \geq 0 \quad (5-28)$$

如果  $K$  为有效 DMU, 其超效率模型表示为

$$\min \rho_{SE} = \frac{1 + w^l \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_i^- / x_{ik}}{1 - w^o \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s s_r^+ / y_{rk}}$$

$$\text{s. t. } \sum_{j=1, j \neq k}^n x_{ij} \lambda_j - s_i^- \leq x_{ik}$$

$$\sum_{j=1, j \neq k}^n y_{rj} \lambda_j + s_r^+ \geq y_{rk}$$

$$\lambda, s^-, s^+ \geq 0$$

$$i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n (j \neq k)$$

$$w^l + w^o > 0, w^l \geq 0, w^o \geq 0 \quad (5-29)$$

表 5-4 列出了一般化导向应用于 SBM 模型时的 7 种特例, 与径向模型的区别在于目标函数与效率值, 参数  $w^l$  和  $w^o$  的设置上二者相同。

表 5-4 一般化导向模型的 7 种特例 (SBM 模型)

序号	模型导向	标准效率模型				超效率模型			
		$w^l$	$w^o$	目标函数	效率值	$w^l$	$w^o$	目标函数	效率值
1	投入导向	1	0	$1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (s_i^- / x_{ik})$	$1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (s_i^- / x_{ik})$	1	0	$1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (s_i^- / x_{ik})$	$1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (s_i^- / x_{ik})$
2	产出导向	0	1	$1 + \frac{1}{q} \sum_{r=1}^q (s_r^+ / y_{rk})$	$1 + \frac{1}{q} \sum_{r=1}^q (s_r^+ / y_{rk})$	0	1	$1 + \frac{1}{q} \sum_{r=1}^q (s_r^+ / y_{rk})$	$1 + \frac{1}{q} \sum_{r=1}^q (s_r^+ / y_{rk})$
3	非导向	1	1	$1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (s_i^- / x_{ik})$	$1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (s_i^- / x_{ik})$	1	1	$1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (s_i^- / x_{ik})$	$1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (s_i^- / x_{ik})$
				$1 + \frac{1}{q} \sum_{r=1}^q (s_r^+ / y_{rk})$	$1 + \frac{1}{q} \sum_{r=1}^q (s_r^+ / y_{rk})$			$1 + \frac{1}{q} \sum_{r=1}^q (s_r^+ / y_{rk})$	$1 + \frac{1}{q} \sum_{r=1}^q (s_r^+ / y_{rk})$

续表

序号	模型导向	标准效率模型			超效率模型				
		$w^I$	$w^O$	目标函数	效率值	$w^I$	$w^O$	目标函数	效率值
4	调整投入导向	1	$\varepsilon$	$1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (s_i^-/x_{ik})$ $1 + \varepsilon \frac{1}{q} \sum_{r=1}^q (s_r^+/y_{rk})$	$1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (s_i^-/x_{ik})$	$\varepsilon$	1	$1 - \varepsilon \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (s_i^-/x_{ik})$ $1 + \frac{1}{q} \sum_{r=1}^q (s_r^+/y_{rk})$	$1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (s_i^-/x_{ik})$
5	调整产出导向	$\varepsilon$	1	$1 - \varepsilon \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (s_i^-/x_{ik})$ $1 + \frac{1}{q} \sum_{r=1}^q (s_r^+/y_{rk})$	$\frac{1}{1 + \frac{1}{q} \sum_{r=1}^q (s_r^+/y_{rk})}$	1	$\varepsilon$	$1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (s_i^-/x_{ik})$ $1 + \varepsilon \frac{1}{q} \sum_{r=1}^q (s_r^+/y_{rk})$	$\frac{1}{1 + \frac{1}{q} \sum_{r=1}^q (s_r^+/y_{rk})}$
6	投入优先非导向	1	$\varepsilon$	$1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (s_i^-/x_{ik})$ $1 + \varepsilon \frac{1}{q} \sum_{r=1}^q (s_r^+/y_{rk})$	$1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (s_i^-/x_{ik})$ $1 + \frac{1}{q} \sum_{r=1}^q (s_r^+/y_{rk})$	$\varepsilon$	1	$1 - \varepsilon \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (s_i^-/x_{ik})$ $1 + \frac{1}{q} \sum_{r=1}^q (s_r^+/y_{rk})$	$1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (s_i^-/x_{ik})$ $1 + \frac{1}{q} \sum_{r=1}^q (s_r^+/y_{rk})$
7	产出优先非导向	$\varepsilon$	1	$1 - \varepsilon \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (s_i^-/x_{ik})$ $1 + \frac{1}{q} \sum_{r=1}^q (s_r^+/y_{rk})$	$1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (s_i^-/x_{ik})$ $1 + \frac{1}{q} \sum_{r=1}^q (s_r^+/y_{rk})$	1	$\varepsilon$	$1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (s_i^-/x_{ik})$ $1 + \varepsilon \frac{1}{q} \sum_{r=1}^q (s_r^+/y_{rk})$	$1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (s_i^-/x_{ik})$ $1 + \frac{1}{q} \sum_{r=1}^q (s_r^+/y_{rk})$

(3) 一般化导向模型解决 VRS 超效率模型无可行解问题的优点。

在上述 7 个特例中, 特例 3 调整投入导向模型可替代投入导向模型, 解决 VRS 超效率模型无可行解的问题。对于投入导向超效率模型有可行解的 DMU (包括无效 DMU 和有效 DMU), 二者的结果相同; 对于投入导向超效率模型无可行解的 DMU, 特例 3 调整投入导向模型有可行解, 可给出超效率值。

特例 4 调整产出导向模型可替代产出导向模型, 解决 VRS 超效率模型无可行解的问题。对于产出导向超效率模型有可行解的 DMU (包括无效 DMU 和有效 DMU), 二者的结果相同; 对于产出导向超效率模型无可行解的 DMU, 特例 4 调整产出导向模型有可行解, 可给出超效率值。

这一解决方案的优点在于以下两点。

1) 当传统的投入(产出)导向超效率模型中有可行解时, 调整投入(产出)导向超效率模型给出的结果与之完全相同;

2) 解决方案给出的超效率值与模型的投入(产出)导向的概念相符, 调整投入导向超效率模型给出的效率值不包含产出的超效率成分, 调整产出导向超效率模型给出的超效率值不包含投入的超效率成分。

(4) 一般化导向模型解决方案的缺陷。

1) 由于调整投入(产出)导向超效率模型本质上属于非导向模型, 因此非导向超效率模型存在的缺陷, 调整投入(产出)导向超效率模型同样存在, 即其投影点在标准效率模型中可能为无效 DMU。原因见前面对非导向超效率模型的分析, 在此不再重复。

2) 调整投入(产出)导向超效率模型也不符合超效率值的一般规律,即不符合“超效率值等于其投影点的标准效率值的倒数”这一规律。

#### \*5.4.4 VRS 超效率模型无可行解的解决方法三

在投入(产出)导向 VRS 超效率模型中,  $DMU_k$  无可行解的一个充分条件是某项产出(投入)指标的数值高于(低于)其他 DMU, 这可以近似理解为其其他 DMU 都没有达到  $DMU_k$  那么高(低)的生产规模, 而 VRS 模型是在近似相同的生产规模间进行比较,  $DMU_k$  与其他 DMU 相比, 找不到合适的参比对象, 从而使模型无可行解。

生产前沿代表着一项生产技术的生产水平, 以投入导向模型为例,  $DMU_k$  因为生产规模过高在其他 DMU 之中找不到参比对象而无可行解, 那么可以在生产前沿上找到一个点作为  $K$  的替代点, 然后再求解超效率模型, 以该点的超效率值作为  $K$  的超效率值。这个替代点(记为  $K'$ ) 须符合以下条件:

(1)  $K'$  位于前沿上;

(2)  $K'$  能够在其他 DMU 中找到与其生产规模相似的 DMU, 也就是说  $K'$  在投入导向 VRS 超效率模型中有可行解;

(3)  $K'$  的生产规模比  $K$  低, 但  $K'$  是前沿上符合第 2 个条件并且与  $K$  的生产规模最接近的点(距离最近)。

根据这种方法的原理, 将其命名为前沿替代点法 (Frontier Proxy Approach, FPA)<sup>①</sup>。

图 5-9 演示了 FPA 法的基本原理。 $K$  由于生产规模过高(产出数量超过其他 DMU), 在其他 DMU 中找不到与其生产规模相同的 DMU 进行参比<sup>②</sup>, 从而在超效率模型中无可行解。根据 FPA 法的思路, 可以在前沿上沿箭头方向找到一个最近的替代点  $K'$ , 该点的生产规模与  $C$  相同, 从而在超效率模型中有可行解。

FPA 法确定的前沿替代点的合理性在于: 从  $K$  移动到  $K'$ , 产出的数量和投入的数量是同

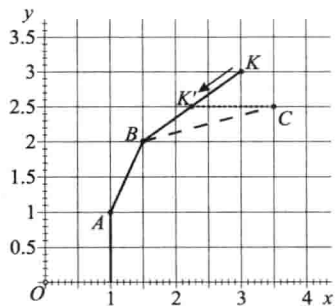


图 5-9 FPA 法示意图(投入导向)

时降低的, 产出减少的数量与投入减少的数量之比值等于前沿  $KK'$  段的边际产出, 产出减少的比例与投入减少的比例之比值等于前沿  $KK'$  段的规模弹性<sup>③</sup>。也就是说这种数值变化是遵循了该项生产技术的规模收益特征的, 并且在实际应用中, 变化的比例一般比较小,  $K$  与  $K'$  差别不大, 这是 FPA 法的合理性之处。

① proxy 是指由  $K'$  作为  $K$  的代理, 代表  $K$  求解超效率; approach 既有方法之义, 又有接近之义, 因此将前沿替代法的英文确定为 Frontier Proxy Approach。

② 准确的表述应该是“在由其他 DMU 构建的生产可能集中找不到与之生产规模相同的点进行参比”, 为便于理解, 使用了不准确的表述。

③  $KK'$  段的规模弹性等于按照前文介绍的采用投入导向模型计算的  $K$  下方的规模弹性。

同理，在产出导向 VRS 超效率模型中，如图 5-10 所示，也可以沿箭头方向为无可行解的 DMU K 确定一个前沿替代点  $K'$ 。

(1) 投入导向 FPA 的求解方法。

在投入导向 VRS 超效率模型中，通过三个步骤来确定无可行解 DMU<sub>K</sub> 的超效率值（见图 5-11）。

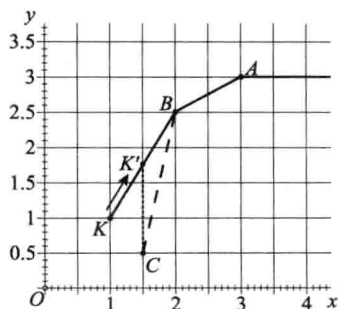


图 5-10 FPA 法示意图（产出导向）

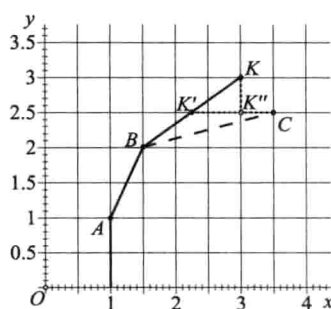


图 5-11 FPA 法求解示意图（投入导向）

第一步，求解以下线性规划，获得从  $K$  移动到  $K'$  产出减少的比例  $\delta^*$ （这一步相当于从  $K$  移动到  $K''$ ）：

$$\begin{aligned}
 & \min \delta \\
 & \text{s. t. } (1 - \delta)y_{rk} \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j y_{rj} \\
 & \quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j = 1 \\
 & \quad \lambda, \delta \geq 0 \\
 & \quad r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n (j \neq k)
 \end{aligned} \tag{5-30}$$

第二步，求解以下线性规划，获得从  $K$  移动到  $K'$  投入减少的比例  $\omega^*$ （这一步相当于从  $K''$  再移动到  $K'$ ）：

$$\begin{aligned}
 & \max \omega \\
 & \text{s. t. } \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq (1 - \omega)x_{ik} \\
 & \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq (1 - \delta^*)y_{rk} \\
 & \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\
 & \quad \lambda, \omega \geq 0 \\
 & \quad i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned} \tag{5-31}$$

第三步, 求解以下投入导向超效率模型, 无可行解  $DMU_k$  的超效率值为  $\theta^*$  :<sup>①</sup>

$$\begin{aligned} & \min \theta \\ \text{s. t. } & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta(1 - \omega^*) x_{ik} \\ & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j y_{rj} \geq (1 - \delta^*) y_{rk} \\ & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j = 1 \\ & \lambda \geq 0 \\ & i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n (j \neq k) \end{aligned} \quad (5-32)$$

(2) 产出导向 FPA 求解方法。

在产出导向 VRS 超效率模型中, 通过相似的三个步骤可以确定无可行解  $DMU_k$  的超效率值 (见图 5-12)。

第一步, 求解以下线性规划, 获得从  $K$  移动到  $K'$  投入增加的比例  $\omega^*$  (这一步相当于从  $K$  移动到  $K''$ ):

$$\begin{aligned} & \min \omega \\ \text{s. t. } & (1 + \omega) x_{ik} \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j x_{ij} \\ & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j = 1 \\ & \lambda, \omega \geq 0 \\ & i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n (j \neq k) \end{aligned} \quad (5-33)$$

第二步, 求解以下线性规划, 获得从  $K$  移动到  $K'$  产出增加的比例  $\delta^*$  (这一步相当于从  $K''$  再移动到  $K'$ ):

$$\begin{aligned} & \max \delta \\ \text{s. t. } & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq (1 + \omega^*) x_{ik} \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq (1 + \delta) y_{rk} \end{aligned}$$

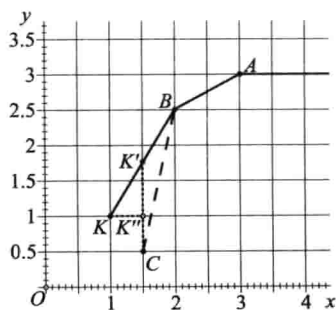


图 5-12 FPA 法求解示意图  
(产出导向)

① 从  $K$  移动到  $K'$ , 投入和产出减少的比例分别为  $\omega^*$  和  $\delta^*$ , 前沿替代点  $K'$  的投入和产出值为  $x_{ik'} = (1 - \omega^*) x_{ik}$ ,  $y_{rk'} = (1 - \delta^*) y_{rk}$ 。

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \lambda_j &= 1 \\ \lambda, \delta &\geq 0 \\ i &= 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (5-34)$$

第三步, 求解以下产出导向超效率模型, 无可行解  $DMU_k$  的超效率值为  $1/\varphi^*$ :<sup>①</sup>

$$\begin{aligned} \max \quad & \varphi \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j x_{ij} \leq (1 + \omega^*) x_{ik} \\ & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j y_{rj} \geq \varphi (1 + \delta^*) y_{rk} \\ & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \lambda_j = 1 \\ & \lambda \geq 0 \\ & i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n (j \neq k) \end{aligned} \quad (5-35)$$

### (3) FPA 解决方案的优点。

FPA 方法是到目前为止解决 VRS 超效率模型无可行解问题最合理的方法, FPA 克服了 Cook W D 等人 (2009) 存在的缺陷, 同时也不存在非导向超效率模型存在的不足。

1) 对于有可行解的  $DMU$ , FPA 同样适用。以投入导向模型为例, 如果有效  $DMU_k$  在传统的超效率模型中有可行解, 则在 FPA 法的第一步,  $\delta^* = 0$ ; 然后第二步相当于标准效率模型,  $\omega^* = 0$ ; 第三步相当于传统的投入导向超效率模型。

2) FPA 与原模型的导向相一致。FPA 法的第三步相当于采用传统的投入 (产出) 导向超效率模型求解前沿替代点  $K'$  的超效率, 这与原模型的导向一致。

3) FPA 得出的超效率值符合超效率的一般规律。FPA 得出的超效率值符合超效率的一般规律, 即超效率值等于投影点的标准效率值的倒数。

4) FPA 不存在投影点无效的问题。FPA 首先在前沿上找到一个合理的替代点, 然后采用传统投入 (产出) 导向超效率模型求解前沿替代点的超效率, 因而其得出的结果与传统投入 (产出) 导向超效率模型得出的结果具有相同的性质, 不会出现投影点在标准效率模型中为无效的问题。

FPA 得出的投影点与 Cook W D 等人 (2009) 方法得出的投影点相同, 这一点从图 5-11 和图 5-12 可以直观地得出。结合“超效率值等于投影点的标准效率值的倒数”这一规律, 为 Cook W D 等人 (2009) 方法存在的缺陷找到了改进

<sup>①</sup> 从  $K$  移动到  $K'$ , 投入和产出增加的比例分别为  $\omega^*$  和  $\delta^*$ , 前沿替代点  $K'$  的投入和产出值为  $x_{ik'} = (1 + \omega^*)x_{ik}$ ,  $y_{rk'} = (1 + \delta^*)y_{rk}$ 。



的思路：采用 Cook W D 等人（2009）的方法求解  $DMU_k$  的超效率模型，获得投影点  $P$ （弱有效投影，其投影值不包含松弛变量）；然后求解投影点  $P$  的标准效率  $\theta_p^*$ ， $DMU_k$  的超效率  $\theta^* = 1/\theta_p^*$ 。这样改进后的 Cook W D 等人（2009）的方法与 FPA 法得到的结果完全相同。两种解决方案达到异曲同工的效果。

## 5.5 MaxDEA 软件求解超效率模型示例

### 5.5.1 对 VRS 超效率模型无可行解问题解决方法比较

在此利用文献（Bal, et al., 2010）中的数据（见表 5-5）对 VRS 超效率模型无可行解问题的三种解决方案的结果进行比较。

在 MaxDEA 软件中选择模型的距离函数和 RTS 选项，然后在 Advanced Models (1) 界面，勾选 SuperEfficiency（见图 5-13）。

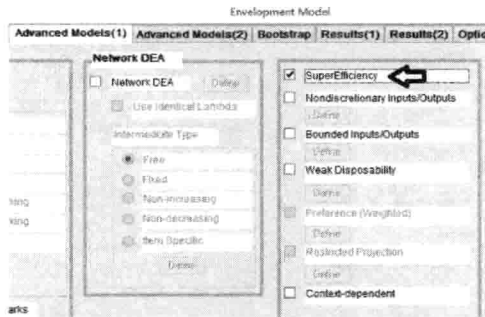


图 5-13 设置模型

MaxDEA 为投入和产出导向 VRS 超效率模型提供了两种解决方案：一般化导向方法和 FPA 方法<sup>①</sup>。

一般化导向方法：在 Orientation 界面选择 Input-oriented (modified) 或 Output-oriented (modified)（见图 5-14）；在 Options 界面可选择或填写  $\varepsilon$  的数值，在径向模型中，一般设置为 0.00001 ~ 0.0001 即可（见图 5-15）。

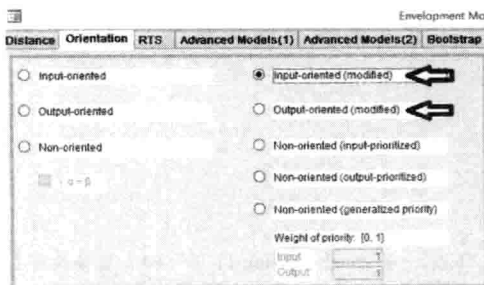


图 5-14 设置 Orientation

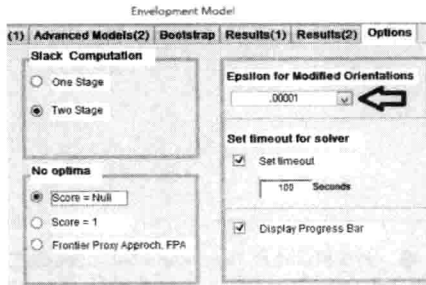


图 5-15 设置  $\varepsilon$  值

① 鉴于 Cook W D 等人（2009）的方案存在的诸多缺陷，MaxDEA 软件中没有提供这一方法。

在非径向模型（如 SBM）中， $\varepsilon$  数值的合适范围受投入产出数值大小的影响，一般在投入产出数值很大时，需要设置相对较大的  $\varepsilon$  值。以表 2-6 中的数据为例，在调整投入导向模型中，如果  $\varepsilon$  小于  $1E-7$ ，就会造成部分 DMU 计算结果产生较大误差。以调整投入导向模型为例，检验  $\varepsilon$  数值是否合适的方法是：比较投入导向模型和调整投入导向模型的有可行解 DMU 的结果，如果二者有差异，则说明  $\varepsilon$  值设置不当，产生了计算误差。

FPA 方法：在 Options 界面 No optima 选项中可以设置模型无可行解时的三种选项：选择 Score = Null，无可行解时结果中 Score 为空；选择 Score = 1，无可行解时效率值默认为 1；选择 Frontier Proxy Approach, FPA 时，若模型无可行解，采用 FPA 法求解超效率<sup>①</sup>（见图 5-16）。

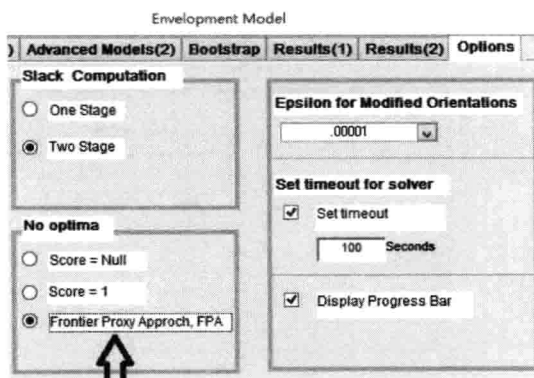


图 5-16 设置 FPA

分析结果见表 5-6。在投入导向 VRS 模型中，共有 14 个有效 DMU，其中只有 2 个超效率模型有可行解，有 12 个无可行解<sup>②</sup>。

表 5-7 是 FPA 法计算过程的中间结果。大部分 DMU 与其前沿替代点差别很小，差别最小的不到 0.001。为了验证在 FPA 法中由  $K$  移动到  $K'$ ，产出下降（上升）的比例与投入下降（上升）的比例之比等于按照投入（产出）导向模型计算的  $K$  点下方（上方）的规模弹性，在表 5-7 中分别提供了利用前文介绍的方法由 MaxDEA 软件计算的规模弹性的数值，结果验证了这一结论。

① 如果同时选择 Input-oriented (modified) 或 Output-oriented (modified) 和 FPA，软件执行 Input-oriented (modified) 或 Output-oriented (modified)，FPA 无效。另外，除了 VRS 超效率模型之外，产生无可行解可能还有其他原因（例如模型设置不当），这时 FPA 法未必适用。

② 模型共有 5 项产出，有 5 个 DMU 的某项产出高于其他所有 DMU，这 5 个 DMU 在投入导向 VRS 超效率模型中均无解，另外还有 7 个 DMU 也无可行解，这用实例说明了“某项产出高于其他所有 DMU”是投入导向超效率模型无可行解的充分但非必要条件。

表 5-5 示例数据

序号	国家	输入 1	输入 2	输入 3	输出 1	输出 2	输出 3	输出 4	输出 5
1	澳大利亚	5.1	3.0	6	34740	80.90	0.993	67.40	2036
2	奥地利	7.2	1.8	5	37117	79.40	0.966	63.80	1968
3	比利时	12.1	1.6	6	35712	78.80	0.977	57.30	2081
4	加拿大	6.8	2.2	6	35133	80.30	0.991	72.80	2312
5	捷克	8.9	1.8	5	12152	75.90	0.936	64.00	930
6	丹麦	5.6	2.4	4	47984	77.90	0.993	74.20	2133
7	英格兰	2.8	1.6	6	37023	79.00	0.970	69.30	1461
8	芬兰	8.4	1.7	4	37504	78.90	0.993	72.80	1502
9	法国	9.1	1.9	4	33918	80.20	0.982	62.40	2055
10	德国	9.2	2.3	5	33854	79.10	0.953	67.40	2424
11	希腊	9.9	4.6	5	20327	78.90	0.970	56.00	1167
12	匈牙利	7.2	5.3	8	10814	72.90	0.958	53.50	705
13	冰岛	1.8	4.8	4	52764	81.50	0.978	82.90	2103
14	爱尔兰	4.3	4.7	6	48604	78.40	0.993	62.20	1436
15	意大利	7.7	2.5	6	30200	80.30	0.958	50.10	1783
16	日本	4.4	1.0	4	35757	82.30	0.946	60.50	1822
17	卢森堡	4.2	1.1	5	80288	78.40	0.942	55.70	2215
18	墨西哥	3.6	5.0	25	7298	75.60	0.863	42.60	356
19	新西兰	3.7	2.7	6	26464	79.80	0.993	71.20	1424
20	荷兰	4.3	3.5	5	38618	79.20	0.988	69.50	2070
21	挪威	3.5	1.3	4	64193	79.80	0.991	77.30	2330
22	波兰	18.2	1.9	9	7946	75.20	0.951	57.60	496
23	葡萄牙	7.6	3.5	6	17456	77.70	0.925	67.80	1237
24	韩国	3.7	2.8	5	16308	79.00	0.904	49.90	730
25	斯洛伐克	11.7	3.3	8	8775	74.20	0.921	62.40	930
26	西班牙	9.2	3.1	5	27226	80.50	0.987	57.20	1218
27	瑞典	5.8	2.2	3	39694	80.50	0.978	74.90	1746
28	瑞士	3.8	0.9	3	50532	81.30	0.946	75.30	2794
29	土耳其	10.3	13.7	38	5816	71.40	0.812	26.50	255
30	美国	5.1	1.6	7	42000	77.90	0.971	70.10	4178

表 5-6 不同解决方案得出的效率值比较

DMU	传统超效率模型		Cook W D 等人的方法 <sup>①</sup>		一般化导向		FPA	
	投入导向	产出导向	投入导向	产出导向	调整投入导向	调整产出导向	投入导向	产出导向
1	—	1.0049	2.1482	1.0049	1.1437	1.0049	1.4385	1.0049
4	—	1.0009	2.0005	1.0009	1.0000	1.0009	1.1114	1.0009
6	—	1.0015	2.1279	1.0015	1.1267	1.0015	1.1451	1.0015
7	1.1550	—	1.1550	2.1416	1.1550	1.0000	1.1550	1.0016
8	—	1.0013	2.4816	1.0013	1.4816	1.0013	1.4826	1.0013
13	—	—	3.0169	2.9950	1.9444	1.4394	1.9444	1.4394
14	—	1.0008	2.2377	1.0008	1.2374	1.0008	1.2780	1.0008
16	—	1.0122	5.8098	1.0122	4.8000	1.0122	5.2174	1.0122
17	—	1.3997	2.4325	1.3997	1.1818	1.3997	1.2642	1.3997
19	—	1.0016	2.7750	1.0016	1.7748	1.0016	1.7876	1.0016
21	—	1.2620	3.7314	1.2620	2.6820	1.2620	2.6922	1.2620
27	1.2573	1.0338	1.2573	1.0338	1.2573	1.0338	1.2573	1.0338
28	—	—	5.1430	2.8309	4.1306	1.5421	4.1306	1.5421
30	—	1.4953	2.2404	1.4953	1.0000	1.4953	1.0227	1.4953

表 5-7 FPA 法中间结果

DMU	投入导向				产出导向			
	第一步 $\delta^*$	第二步 $\omega^*$	下方 规模弹性	第三步 $\theta^*$	第一步 $\omega^*$	第二步 $\delta^*$	上方 规模弹性	第三步 $1/\varphi^*$
1	0.004547	0.204935	0.022187	1.4385	0	0	0	0.9952
4	0.000912	0.100621	0.009061	1.1114	0	0	0	0.9991
6	0.001199	0.016073	0.074622	1.1451	0	0	0	0.9985
7	0	0	Infinity	1.1550	0.154952	0.01513	0.097643	0.9984
8	0.000055	0.000702	0.079053	1.4826	0	0	0	0.9987
13	0.067551	0	Infinity	1.9444	0.555556	0	0	0.6947
14	0.000224	0.031724	0.007069	1.2780	0	0	0	0.9992
16	0.009721	0.08	0.121507	5.2174	0	0	0	0.9879
17	0.200466	0.065156	3.076717	1.2642	0	0	0	0.7145
19	0.000223	0.007139	0.031192	1.7876	0	0	0	0.9984
21	0.047005	0.003766	12.480285	2.6922	0	0	0	0.7924
27	0	0	Infinity	1.2573	0	0	0.011601	0.9673
28	0.012261	0	Infinity	4.1306	0.288889	0	0	0.6485
30	0.331259	0.271462	1.220278	1.0227	0	0	0	0.6687

① Cook W D 等人 (2009) 的效率值计算公式不适用于传统超效率模型中有可行解的 DMU, 因此这些 DMU 的结果来自传统方法。

### 5.5.2 通过超效率模型探测异常数据

DEA 的非参数前沿本质决定了, 如果一个异常数据出现在前沿上, 则可能会出现大量异常结果, 甚至其他 DMU 的分析结果都会异常。因此, 分析时确认是否存在异常值是一项重要工作。当数据量较大时, 通过直接观察发现异常值非常困难。

超效率模型的一项重要功能就是发现异常值, 下面通过将表 2-6 中的数据修改为异常数值, 然后通过超效率模型来识别出异常值。将安徽的投入数据减少至原来的 10%, 其他数据保持不变。改变前后的结果比较见表 5-8。安徽的数值改变后, 在投入导向模型的分析结果中, 几乎所有 DMU 的效率值都发生了改变。特别是 CRS 模型, 变化尤为突出, 除安徽自身外, 其他所有 DMU 的效率值都降低至原来的 1/10 ~ 1/6; VRS 的变化相对较小, 有 4 个有效 DMU 的结果没有受到影响, 其他 DMU 的效率值降低幅度呈现连续性变化, 影响最小的变化幅度仅 4%, 最大的降低至原来的接近 1/10。从超效率看, 安徽 CRS 和 VRS 超效率值均大于 10, 与其数值变化的比例相符。

表 5-8 通过超效率模型探测异常值 (投入导向)

地 区	CRS			VRS		
	正常效率值	异常数据效率值	异常数据超效率值	正常效率值	异常数据效率值	异常数据超效率值
安 徽	0.9442	0.1006	0.1006	0.9549	0.5786	0.5786
北 京	0.9174	0.1487	0.1487	0.9185	0.4967	0.4967
福 建	1.0000	1.0000	10.4553	1.0000	1.0000	10.5133
甘 肃	0.8324	0.0979	0.0979	0.8538	0.1458	0.1458
广 东	1.0000	0.1490	0.1490	1.0000	1.0000	1.3051

从这一简单的示例可以看出, 超效率模型是一种有效的发现异常数据的方法。在实际应用中, 可以通过改变距离函数、模型导向和 RTS 类型, 分析多种超效率模型来探测可能的异常数据。

## 第 6 章 DEA 模型中对特殊投入产出指标的处理

### 6.1 坏产出投入指标

关于在 DEA 模型中如何处理坏产出指标，在前面的方向距离函数部分已作了详细介绍。

在此再介绍一下坏产出在 SBM 模型中处理方法。Tone 定义的包含坏产出的 SBM 模型为 (Cooper William W, et al., 2007):

$$\begin{aligned} \min \rho &= \frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_i^- / x_{ik}}{1 + \frac{1}{q_1 + q_2} \left( \sum_{r=1}^{q_1} s_r^+ / y_{rk} + \sum_{t=1}^{q_2} s_t^{b-} / b_{tk} \right)} \\ \text{s. t. } X\lambda + s^- &= x_k \\ Y\lambda - s^+ &= y_k \\ B\lambda + s^{b-} &= b_k \\ \lambda, s^-, s^+ &\geq 0 \end{aligned} \quad (6-1)$$

本书在前面的讨论中建议在方向距离函数或径向模型中，将坏产出设置为强可处置性。从 SBM 的规划式可以反映出其生产可能集正是基于坏产出强可处置性的。

Tone 没有给出包含坏产出的 SBM 超效率模型的规划式，但根据 SBM 超效率模型 (5-6) 可推出包含坏产出的 SBM 超效率模型为

$$\begin{aligned} \min \rho &= \frac{1 + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_i^- / x_{ik}}{1 - \frac{1}{q_1 + q_2} \left( \sum_{r=1}^{q_1} s_r^+ / y_{rk} + \sum_{t=1}^{q_2} s_t^{b-} / b_{tk} \right)} \\ \text{s. t. } \sum_{j=1, j \neq k}^n x_{ij} \lambda_j - s_i^- &\leq x_{ik} \\ \sum_{j=1, j \neq k}^n y_{rj} \lambda_j + s_r^+ &\geq y_{rk} \\ \sum_{j=1, j \neq k}^n b_{tj} \lambda_j - s_t^{b-} &\leq b_{tk} \\ 1 - \frac{1}{q_1 + q_2} \left( \sum_{r=1}^{q_1} s_r^+ / y_{rk} + \sum_{t=1}^{q_2} s_t^{b-} / b_{tk} \right) &> 0 \end{aligned}$$

$$\lambda, s^-, s^+ \geq 0$$

$$i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n (j \neq k) \quad (6-2)$$

其中增加的约束  $1 - \frac{1}{q_1 + q_2} \left( \sum_{r=1}^{q_1} s_r^+ / y_{rk} + \sum_{t=1}^{q_2} s_t^- / b_{tk} \right) > 0$  可在线性转换时去除。

在 DEA 模型中, 还可通过将坏产出表示为负数的方式来处理。另外, 在 MaxDEA 软件中, 没有提供专门的非投入模型, 可通过将坏投入指标转换为负数的方式解决, 详见后面负数指标的介绍。

MaxDEA 软件支持负数指标, 并支持各种模型选项的组合应用, 如包含坏产出的 SBM 超效率模型, 只需选择 SBM 模型, 并在 Advanced Models (1) 界面勾选 SuperEfficiency 和 Undesirable Outputs 并进行相应设置即可。

## 6.2 指标中存在 0 的问题

在 DEA 模型的投入和产出数据中, 应尽量避免出现 0。从 DEA 规划式的角度, 距离函数和导向类型决定投入产出指标中是否允许有 0。

(1) 径向模型和方向距离函数模型: 投入导向模型允许产出数据中有 0, 产出导向模型允许投入数据中有 0; 投入导向模型中必须至少有一项投入数据大于 0, 产出导向模型中必须至少有一项产出数据大于 0, 非导向模型中必须至少有一项投入数据和一项产出数据大于 0。

(2) SBM 和 MinDS: 投入导向模型允许产出数据中有 0, 产出导向模型允许投入数据中有 0; 投入导向模型中不允许投入数据有 0, 产出导向模型中不允许产出数据有 0。

在上述不允许出现 0 的情况中, 如果采用一个很小的正数替换 0, 该数值的大小会直接决定被评价 DMU 的效率值, 并可能会对其他 DMU 的分析结果产生很大影响, 因此很难确定多大的数值合适。所以, 在出现上述不允许的情况时, 最好的处理方式是将不满足条件的 DMU 删除, 或者将不满足条件的指标删除。

## \* 6.3 负数指标问题

部分 DEA 模型允许投入和产出指标中存在负数, 如自定义方向向量的方向距离函数模型、RDM 方向距离函数模型、MSBM 模型等。

对径向模型、SBM 和 MinDS 模型而言, 投入导向模型允许产出数据中有负数, 产出导向模型允许投入数据中有负数, 非导向模型中不允许有负数<sup>①</sup>。

① 有学者认为, 上述允许有负数的情况仅适用于 VRS 模型, 因为只有 VRS 模型才符合平移不变性 (translation-invariance): 包含负数的指标同时加上一个正数之后, 模型的结果保持不变, 从而可以将负数指标通过平移转换为正数指标。本书作者认为, 平移不变性是允许负数的充分条件, 而非必要条件。上述允许有负数的情况可否用于其他 RTS 类型, 决定于所研究的技术和数据是否符合相应的 RTS 类型特征。如果技术符合投入变为原来的  $\lambda$  倍 ( $\lambda X$ ), 产出包括负产出会相应的变为原来的  $\lambda$  倍 (该技术符合 CRS 特征), 则上述允许有负数的情况可应用于 CRS 模型 (例如用负数表示非期望产出)。

以径向模型为例来说明为什么不允许有负数。投入导向径向 VRS 模型可等价表示为

$$\begin{aligned}
 & \min 1 - \beta \\
 & \text{s. t. } X\lambda + \beta x_k \leq x_k \\
 & \quad Y\lambda \geq y_k \\
 & \quad e\lambda = 1 \\
 & \quad \lambda \geq 0
 \end{aligned} \tag{6-3}$$

$x_{ik} - \alpha x_{ik}$  是被评价 DMU 的投入指标在径向改进后的目标值, 改进值为  $-\alpha x_{ik}$ , 负数表示改进方向为减少投入。当投入指标  $x_k$  为负数时, 改进值变为正数, 径向改进方向变成了等比例增加投入。

同理, 在产出导向模型中, 当产出指标  $y_k$  为负数时, 也会出现改进方向变为等比例减少产出的错误结果。

在径向模型中如果将改进部分  $-\alpha x_k$  中的  $x_k$  取绝对值, 就可以避免出现上述逻辑错误, 并且如果投入指标为正数, 修改后的模型与修改前的模型等价 (Cheng, et al., 2013)。修改后的径向模型 (Variant of Radial Measure, VRM) 表示为

$$\begin{aligned}
 & \min 1 - \beta \\
 & \text{s. t. } X\lambda + \beta |x_k| \leq x_k \\
 & \quad Y\lambda \geq y_k \\
 & \quad e\lambda = 1 \\
 & \quad \lambda \geq 0
 \end{aligned} \tag{6-4}$$

修改后的 DEA 线性规划式, 在不包含负数时, 即  $x_k$  为正数时, 其最优解与传统的 DEA 线性规划式等价。也就是说, 新的 DEA 模型保持了与传统 DEA 模型的兼容性。当  $y_k$  为负数时, 取绝对值保证了无效率正确的改进方向。

修改后的产出导向 VRM 模型表示为

$$\begin{aligned}
 & \min \frac{1}{1 + \beta} \\
 & \text{s. t. } X\lambda \leq x_k \\
 & \quad Y\lambda - \beta |y_k| \geq y_k \\
 & \quad e\lambda = 1 \\
 & \quad \lambda \geq 0
 \end{aligned} \tag{6-5}$$

同理, 可以对 SBM 模型进行类似处理, 但只需对 SBM 模型的目标函数进行修改即可。

$$\begin{aligned}
 \min \rho &= \frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_i^- / |x_{ik}|}{1 + \frac{1}{q} \sum_{r=1}^q s_r^+ / |y_{rk}|} \\
 \text{s. t. } X\lambda + s^- &= x_k \\
 Y\lambda - s^+ &= y_k
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} e\lambda &= 1 \\ \lambda, s^-, s^+ &\geq 0 \end{aligned} \quad (6-6)$$

VRM模型存在的两个问题。

(1) 当投入或产出指标中既有负数也有正数时, 修改后模型得出的效率值不具备单调性, 即存在有可能出现被评价 DMU 减少投入后或增加产出后, 得出的效率值反而下降的问题。在这种情况下, 可将一个既包含正数也包含负数的指标分解为两个指标, 分别保存指标的正数部分和负数部分。<sup>①</sup>

$$v_{ij}^1 = \begin{cases} v_{ij} & \text{if } v_{ij} \geq 0 \\ 0 & \text{if } v_{ij} < 0 \end{cases} \text{ 和 } v_{ij}^2 = \begin{cases} 0 & \text{if } v_{ij} \geq 0, \\ v_{ij} & \text{if } v_{ij} < 0 \end{cases} \quad (6-7)$$

(2) VRM模型需有条件应用于 CRS。CRS VRM模型仅适用于以下情况: 负数指标中只包含负数, 且伴随着生产规模扩大(投入增加), 负数指标的绝对值增加。例如, 将非期望产出用负数表示, 随着生产规模的扩大, 非期望产出也会相应增加。

如果用负数表示非期望产出, VRM模型与前文介绍的包含非期望产出的径向模型等价。包含负数产出指标的 VRM模型(产出导向)为

$$\begin{aligned} \min & \frac{1}{1 + \beta} \\ \text{s. t. } & X\lambda \leq x_k \\ & Y\lambda - \beta |y_k| \geq y_k \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned} \quad (6-8)$$

其中, 约束  $Y\lambda - \beta |y_k| \geq y_k$  可分解为正数产出指标和负数产出指标的约束:

$$\begin{aligned} Y^+ \lambda - \beta y_k &\geq y_k^+ \\ Y^- \lambda - \beta(-y_k) &\geq y_k^- \end{aligned}$$

负数产出指标约束的两边同乘以 -1, 得

$$(-Y^-)\lambda + \beta(-y_k) \leq (-y_k^-)$$

与包含非期望产出的产出导向径向模型(4-45)等价。

类似地, 可通过负数指标来处理坏投入问题, 如垃圾和废水处理等。

## 6.4 外部不可控因素或不可控投入产出指标

在效率或生产率分析的实际应用中, 经常会遇到生产过程受到某些决策者所不能控制的外部影响因素, 如公共卫生服务效率会受到服务区域内交通便利程度、人口密度等因素的影响。如果这些因素能够归结为数值变量, 并且转换为正向指标, 即值越大说明生产环境越优, 则可以在 DEA模型中将这类外部影响因

<sup>①</sup> 这一分离正负数的方法是借鉴 Emrouznejad 等人(2010)提出的 SORM(Semi-Oriented Radial Measure)方法, 但有区别。Emrouznejad 等人(2010)的方法分离后的两个变量保存的均为正数,

即  $v_{ij}^1 = \begin{cases} v_{ij} & \text{if } v_{ij} \geq 0 \\ 0 & \text{if } v_{ij} < 0 \end{cases}$  和  $v_{ij}^2 = \begin{cases} 0 & \text{if } v_{ij} \geq 0 \\ -v_{ij} & \text{if } v_{ij} < 0 \end{cases}$ 。

素作为不可控投入指标处理。另外，在生产实践中也存在部分投入（产出）数量不是决策者所能决定或控制的情况。这种情况下，同样可作为不可控投入（产出）指标处理。例如，医院提供的医疗服务数量不是医院决策者所能直接决定的，虽然可以通过提高服务质量等方式吸引患者就医。

以包含不可控投入的 DEA 模型为例，在模型中对不可控投入和可控投入进行不同的处理（Banker & Morey, 1986）。以 VRS 模型为例，其线性规划式为：

$$\begin{aligned}
 & \min \theta \\
 & \text{s. t. } X_D \lambda - \theta x_{k,D} \geq 0 \\
 & \quad X_N \lambda \leq x_{k,N} \\
 & \quad Y \lambda \geq y_k \\
 & \quad e \lambda = 1 \\
 & \quad \lambda \geq 0
 \end{aligned} \tag{6-9}$$

$D$  表示可控投入， $N$  表示不可控投入。

在约束条件中不可控投入与效率值  $\theta$  不发生直接关系，这使得不可控投入的作用仅限于保证参比的合理性（投影点的生产环境不优于被评价 DMU），其原理类似于统计分析中对混杂因素的控制。

在文献中，不同的学者对这一类 DEA 模型有不同的命名。最先提出这一模型的 Banker 和 Morey（1986）将其称为具有外生不可控投入和产出的 DEA 模型；Zhu（2009）将这一模型称为特定测量模型（measure specific model）；Cooper William W 等人（2007）称为不可控变量模型。

在 MaxDEA 软件中，建立包含不可控投入产出的模型只需在选择好 DEA 模型距离函数、导向和 RTS 选项之后，在 Advanced Models (1) 界面，勾选 Non-discretionary Inputs/Outputs，然后点击 Define，打开不可控投入产出的设置界面，设置各项投入产出指标是否可控。Full Discretion 表示指标可控，Part - or Non - Discretion 表示指标不可控（见图 6-1）。

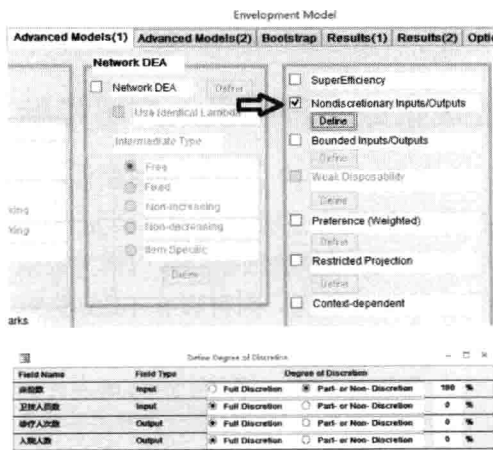


图 6-1 设置各项投入产出指标是否可控

在选择是否可控的基础上, MaxDEA 软件还允许对其可控程度进一步限制, 可控程度为 0 ~ 100%。设置为 100% 表示不再对指标的目标值的范围进一步限制, 设置为 0 表示该指标为固定指标, 不能做任何调整。固定投入模型的规划式表示为

$$\begin{aligned}
 & \min \theta \\
 & \text{s. t. } X_D \lambda - \theta x_{k,D} \geq 0 \\
 & \quad X_N \lambda = x_{k,N} \\
 & \quad Y \lambda \geq y_k \\
 & \quad e \lambda = 1 \\
 & \quad \lambda \geq 0
 \end{aligned} \tag{6-10}$$

通过设置可控程度, 对不可控投入指标进一步限制为

$$X_N \lambda \geq x_{k,N} \times (1 - p\%) \tag{6-11}$$

对不可控产出指标进一步限制为

$$Y_N \lambda \leq y_{k,N} \times \frac{1}{(1 - p\%)} \tag{6-12}$$

以上说明以径向模型为例, 但是这种对不可控投入(产出)指标的处理及其对其目标值的进一步限制同样可应用于其他距离函数。

## 6.5 限制投入产出指标的目标值边界

Cooper William W 等人(2007)介绍了一种对不可控投入(产出)指标的目标值设置上限和下限的模型(Bounded Variable Model), 可以看做对不可控投入(产出)指标模型的一般化处理。以投入导向 VRS 模型为例,

$$\begin{aligned}
 & \min \theta \\
 & \text{s. t. } X_D \lambda - \theta x_{k,D} \geq 0 \\
 & \quad X_N \lambda \leq x_{k,N} \\
 & \quad Y \lambda \geq y_k \\
 & \quad e \lambda = 1 \\
 & \quad l_x \leq X_N \lambda \leq u_x \\
 & \quad l_y \leq Y_N \lambda \leq u_y \\
 & \quad \lambda \geq 0
 \end{aligned} \tag{6-13}$$

$l$  和  $u$  分别表示投入或产出目标值的上界和下界。

不可控投入(产出)指标模型可以通过设置目标值边界的方式实现, 对不可控投入指标的可控程度设置为  $p\%$ , 相当于设置其下界为  $l_x = x_{k,N} \times (1 - p\%)$ ; 对不可控产出指标的可控程度设置为  $p\%$ , 相当于设置其上界为  $u_y = y_{k,N}$

$$\frac{1}{(1 - p\%)}$$

在 MaxDEA 软件中求解边界模型, 需要在数据中为每个要设置目标值边界的

指标增加两个变量，分别表示其目标值的上界和下界。如果仅需设置上界（下界），则只需将下界（上界）变量值设置为 0（足够大的正数）即可。导入数据时，这些变量保持 Not defined 不变（见图 6-2）。

Field No	Field Name	Field Type	Active
1	地区	DMU Name	<input checked="" type="checkbox"/>
2	床位数	Input	<input checked="" type="checkbox"/>
3	卫技人员数	Input	<input checked="" type="checkbox"/>
4	诊疗人次数	Output	<input checked="" type="checkbox"/>
5	出院人数	Output	<input checked="" type="checkbox"/>
6	床位数上界	Not defined	<input checked="" type="checkbox"/>
7	床位数下界	Not defined	<input checked="" type="checkbox"/>

图 6-2 设置目标值边界的数值

在 Advanced Models (1) 界面，勾选 Bounded Inputs/Outputs，然后点击 Define 打开上下界变量设置界面，为设置目标值边界的指标选择上界和下界变量（见图 6-3）。

Field Name	Field Type	Full Discretion / Bounded	Lower Bound	Upper Bound
床位数	Input	<input checked="" type="radio"/> Full Discretion <input checked="" type="radio"/> Bounded	床位数上界	床位数上界
卫技人员数	Input	<input checked="" type="radio"/> Full Discretion <input type="radio"/> Bounded		床位数上界
诊疗人次数	Output	<input checked="" type="radio"/> Full Discretion <input type="radio"/> Bounded		床位数上界
出院人数	Output	<input checked="" type="radio"/> Full Discretion <input type="radio"/> Bounded		

图 6-3 设置目标值边界

## 6.6 保证域模型

在 DEA 的乘数模型中，对乘数（投入产出的权重  $\nu$  和  $\mu$ ）约束仅为  $\mu, \nu \geq 0$  或  $\mu, \nu \geq \varepsilon$ 。在乘数模型的结果中，经常会出现投入或产出权重为 0（或  $\varepsilon$ ）的情况，并且各 DMU 之间的权重值往往差别较大，保证域（Assurance Region）模

型就是为解决这些问题而提出的。

保证域的概念首先由 Thompson R G 等人 (1986) 提出并应用于选址问题。随后更多学者对此方法进行了研究和应用, 如 Dyson 和 Thanassoulis (1988)、Thompson Russell G 等人 (1990)、Wong 和 Beasley (1990) 等。

保证域模型是在乘数模型的基础上, 对乘数 (投入产出权重) 进行某种形式的约束, 使其数值处于一定范围内, 这是保证域这一名称的由来。保证域模型因此也被称为乘数约束 (Restricted Multiplier) 模型。对乘数进行限制之后, 模型得出的效率值小于或等于原模型的效率值, 从而使模型的区分度增强。

最常用的约束形式是对两个乘数的比值进行限制, 使其不能超出某一范围。

在 MaxDEA 软件中, 提供了两种类型的保证域 (乘数约束) 模型, 分别为 Restricted Multiplier (Type I) 和 Restricted Multiplier (Type II), 如图 6-4 所示。

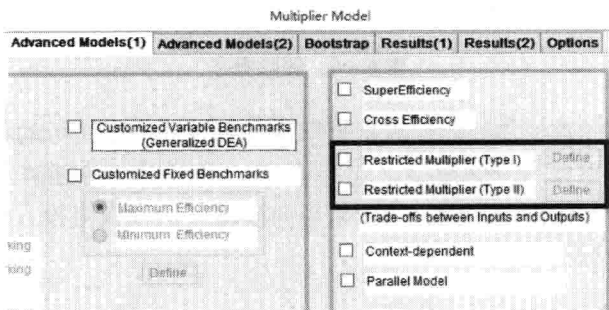


图 6-4 MaxDEA 中的保证域模型

第一种是将两个投入或产出权重的比值限定在一定范围内, 如

$$L_1 \leq \frac{\mu_2}{\mu_1} \leq U_1$$

$$L_2 \leq \frac{\mu_3}{\mu_1} \leq U_2$$

第二种是对某项投入或产出的加权数值 ( $\nu_i x_{ik}$  或  $\mu_r y_{rk}$ ) 占总投入 (或产出) 加权值 ( $\sum_{i=1}^m \nu_i x_{ik}$  或  $\sum_{r=1}^q \mu_r y_{rk}$ ) 的比例限定在一定范围, 如

$$0.1 \leq \frac{\nu_1 x_{1k}}{\sum_{i=1}^m \nu_i x_{ik}} \leq 0.3$$

$$0.1 \leq \frac{\mu_1 y_{1k}}{\sum_{r=1}^q \mu_r y_{rk}} \leq 0.3$$

注意, 当对多项投入 (或产出) 的加权值进行限时, 各下界数值之和不能大于 1; 当对所有投入 (或产出) 的加权值进行限时, 各上界值之和不能小于 1。

在 MaxDEA 软件中, 点击 Restricted Multiplier (Type I) 或 Restricted Multiplier (Type II) 右侧的 Define 按钮, 打开权重设置界面。

如果设置多项约束, 可以通过勾选右侧的 Active 框, 选择生效的设置 (见图 6-5)。如要删除, 在箭头所指的边栏处点击右键 - 剪切即可, 或者在边栏点击左键, 然后通过键盘 Delete 键, 或工具栏上的剪切或删除按钮 (见图 6-6)。

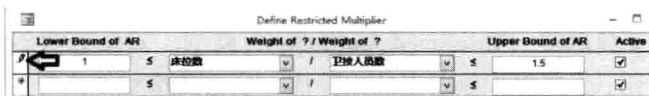


图 6-5 设置权重



图 6-6 删除操作

上界和下界的数值需要研究者根据掌握的投入和产出指标的信息来确定。

通过保证域模型的对偶模型 (包络模型) 可以更好地理解上界和下界的含义, 以第一类保证域模型为例, 其投入导向模型 (假设仅对投入 1 和投入 2 的权重比值进行限制) 为

$$\begin{aligned}
 & \max \sum_{r=1}^q \mu_r y_{rk} \\
 & \text{s. t. } \sum_{r=1}^q \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0 \\
 & \quad \sum_{i=1}^m v_i x_{ik} = 1 \\
 & \quad L \leq \frac{v_1}{v_2} \leq U \\
 & \quad v \geq 0; \mu \geq 0 \\
 & \quad i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned} \tag{6-14}$$

其对偶模型 (包络模型) 为

$$\begin{aligned}
 & \min \theta \\
 & \text{s. t. } - \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + \theta x_{ik} \geq 0, i \neq 1, i \neq 2 \quad (\text{a}) \\
 & \quad - \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{1j} + \theta x_{1k} + \omega_1 - \omega_2 \geq 0 \quad (\text{b}) \\
 & \quad - \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{2j} + \theta x_{2k} - U\omega_1 + L\omega_2 \geq 0 \quad (\text{c}) \\
 & \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{rk} \quad (\text{d})
 \end{aligned}$$

$$\lambda \geq 0, \omega \geq 0$$

$$i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j = 1, 2, \dots, n \quad (6-15)$$

生产可能集中投入1和投入2产生的变动为

$$x_1 \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{1j} - \omega_1 + \omega_2$$

$$x_2 \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{2j} + U\omega_1 - L\omega_2$$

约束b和c的含义是，在原有的生产可能集基础上，允许以1:U的比例减少投入1同时增加投入2，或者以1:L的比例增加投入1同时减少投入2。简单地说，就是允许减少一个单位的投入1同时增加U个单位的投入2，或者增加一个单位的投入1同时减少L个单位的投入2。

当 $U=L$ 时，表示允许投入1和投入2以1:U的比例相互替代，该比例对应的是两项生产要素的边际技术替代率（Marginal Rate of Technical Substitution, MRTS）。因此，如果边际技术替代率已知，则U和L的数值可依据边际技术替代率设定。

## 第7章 广义 DEA 模型

从本章开始，内容不再涉及新的距离函数类型或其他 DEA 模型。本章的广义 DEA 模型及下一章的面板数据 DEA 讨论的都是 DEA 模型中被评价集和参考集的关系问题。

### 7.1 广义 DEA 模型

马占新（2002）提出了样本 DEA 的概念，马占新和马生昫（2009）以样本 DEA 为基础提出了广义 DEA（Generalized DEA）的概念<sup>①</sup>。

广义 DEA 模型的核心是“被评价单元集”与“参考集”的分离。传统 DEA 评价的是决策单元之间的相对有效性，参考集就是被评价单元集自身；而广义 DEA 是对被评价单元与参考集之间的比较。参考集与被评价单元集的关系可能是包含、相等、相交或无关<sup>②</sup>。

从生产可能集的概念上区分，传统 DEA 的生产可能集是由被评价集构成的；而广义 DEA 的生产可能集是由参考集构成的，实现了评价对象与参考标准的分离，如不同分组的决策单元集与同一固定参考集的比较。

我们用  $V$  表示被评价集（the eValuated Set），用  $T$  表示参考集（the Referred Technology or Reference Set），在广义 DEA 中被评价集（ $k \in V$ ）和参考集（ $j \in T$ ）的关系包括：

- (1)  $V = T$ ，被评价集与参考集相同，即传统的 DEA；
- (2)  $V \subset T$ ，被评价集是参考集的一部分；
- (3)  $T \subset V$ ，参考集是被评价集的一部分；
- (4)  $V \cap T = \Phi$ ，参考集与被评价集互不包含，没有交叉；
- (5)  $V \cap T \neq \Phi$ ，参考集与被评价集有交叉。

以投入导向 CRS 径向模型为例，广义 DEA 模型可简单的表示为

---

① 在马占新（2002）提出的样本 DEA 模型中，参考集被称为样本集。马占新（2002）提出的“样本 DEA”和马占新 & 马生昫（2009）提出的“广义 DEA”，其核心都是“决策单元集”与“参考集”的分离，或者说是评价对象与比对标准的分离。从名称上讲“广义 DEA”更为恰当。

② Cook Wade D., et al. (2004) 提出的 variable - benchmark DEA 模型的核心也是“决策单元集”与“参考集”的分离，从这个意义上讲 Cook Wade D., et al. (2004) 提出的 variable - benchmark DEA 与马占新（2002）和马占新 & 马生昫（2009）提出的样本 DEA 和广义 DEA 是基于同一概念，但马占新 & 马生昫（2009）对广义 DEA 内容的发展更为丰富。



$$\begin{aligned}
& \min \theta \\
& \text{s. t. } \sum_{j \in T} \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{ik} \\
& \quad \sum_{j \in T} \lambda_j y_{rj} \geq y_{rk} \\
& \quad \lambda \geq 0 \\
& \quad i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j \in T, i \in V
\end{aligned} \tag{7-1}$$

$T$  表示参考集, 代表参比的技术。

虽然广义 DEA 的提出是基于径向 DEA 模型, 但是这一思想可以推广至其他距离函数类型, 如方向距离函数、SBM、MinDS、MinDW、成本、收益、利润等模型。

从被评价 DMU 个体的角度考虑, 如果被评价 DMU 不在参考集内, 即  $k \notin T$ , 并且也不在参考集  $T$  的生产可能集范围内时, 即  $k = (x_k, y_k) \notin \{(x, y) \mid x \geq \sum_{j \in T} \lambda_j x_{ij}, y \leq \sum_{j \in T} \lambda_j y_{rj}\}$ , 则广义 DEA 实质上为超效率模型。

需要注意的是, 有些距离函数的标准效率模型的规划式与超效率模型的规模式并不相同, 这时广义 DEA 的表达式就需要分别表示。以 SBM 模型为例, 其广义 DEA 模型可表示为

$$\begin{aligned}
\min \rho &= \frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_i^- / x_{ik}}{1 + \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s s_r^+ / y_{rk}} \\
\text{s. t. } & \sum_{j \in T} x_{ij} \lambda_j + s_i^- = x_{ik} \\
& \sum_{j \in T} y_{rj} \lambda_j - s_r^+ = y_{rk} \\
& \lambda, s^-, s^+ \geq 0 \\
& i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j \in T, i \in V
\end{aligned} \tag{7-2}$$

如果 DMU<sub>k</sub> 在模型 (7-2) 中无可行解时, 需进一步求解模型

$$\begin{aligned}
\min \rho_{SE} &= \frac{1 + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_i^- / x_{ik}}{1 - \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s s_r^+ / y_{rk}} \\
\text{s. t. } & \sum_{j \in T} x_{ij} \lambda_j - s_i^- \leq x_{ik} \\
& \sum_{j \in T} y_{rj} \lambda_j + s_r^+ \geq y_{rk} \\
& \lambda, s^-, s^+ \geq 0 \\
& i = 1, 2, \dots, m; r = 1, 2, \dots, q; j \in T, i \in V
\end{aligned} \tag{7-3}$$

## 7.2 群组参比模型

如果数据中的 DMU 按照某种属性可以分为若干群组，如将中国的省（市、自治区）按东、中、西部划分为三组；或者对现有数据进行某种处理，生成不同群组的 DMU，如利用广义 DEA 方法中的前沿面平移方法，生成多个新的 DMU 群组。然后在不同的群组之间，按照“被评价集”和“参考集”角色不同，可进行各种形式的参比（Cluster Benchmarking）。

在以下图示中，一条线代表一对被评价集和参考集，右侧的大括号表示对应集合的并集。

### 7.2.1 自我参比

每个群组各自以自身作为“参考集”，分别进行“自评”。如果将各个群组的数据分别保存在不同的数据库中，然后对每个数据库分别进行分析，得到的结果与自我参比的结果相同（见图 7-1）。

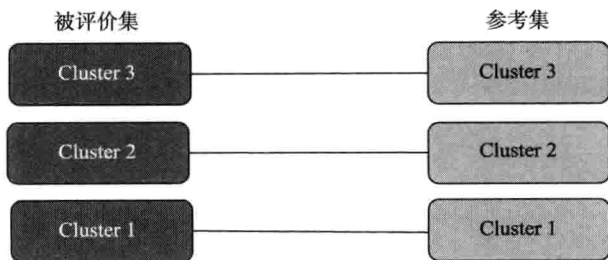


图 7-1 自我参比

利用自我参比方法，可以方便地进行 MetaFrontier-DEA（共同边界 DEA）分析。通过比较不分组的 DEA 模型的结果（传统方法，所有 DMU 作为一个参考集）和划分群组后自我参比的结果，即可得到技术缺口比率（Technology Gap Ratio, TGR）。

### 7.2.2 交叉参比

每个群组分别作为参考集，对各个群组依次进行评价。交叉参比包含了自我参比（见图 7-2）。

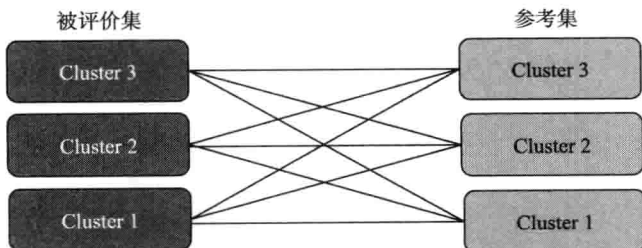


图 7-2 交叉参比

### 7.2.3 向下参比

向下参比是每个群组以自身加上群组编号比自己小的所有群组作为参考集。以 Cluster 3 为例，其参考集为三个集合的并集： $\text{Cluster 3} \cup \text{Cluster 2} \cup \text{Cluster 1}$ （见图 7-3）。群组编号最小的群组的参考集是其自身。

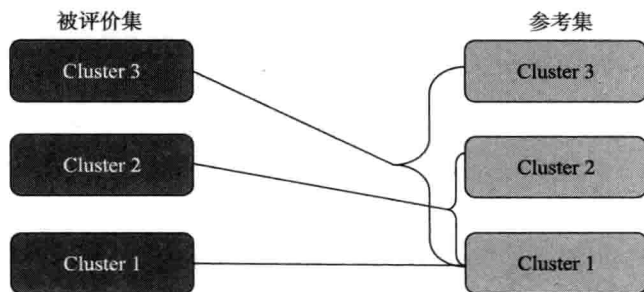


图 7-3 向下参比

向下参比方法适用于按照外部因素对生产效率影响的大小将所有 DMU 分为若干组（负面影响越大，群编号越低）。每个群组的参考集是自身加外部影响更大的群组，也就是说参考集的生产环境不会优于被评价集。

### 7.2.4 向上参比

与向下参比相反，向上参比是每个群组以自身加上群组编号比自己大的所有群组作为参考集。以 Cluster 1 为例，其参考集为三个集合的并集： $\text{Cluster 3} \cup \text{Cluster 2} \cup \text{Cluster 1}$ （见图 7-4）。群组编号最大的群组的参考集是其自身。

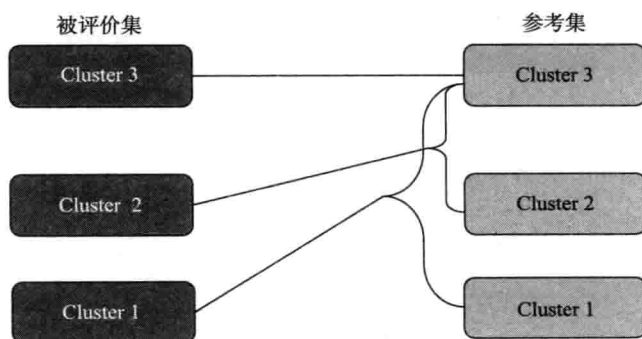


图 7-4 向上参比

向上参比同样适用于按照外部因素对生产效率影响的大小将所有 DMU 分为若干组（注意：负面影响越大，群编号越高）。每个群组的参考集是自身加外部影响更大的群组，也就是说参考集的生产环境不会优于被评价集。

### 7.2.5 下方邻群参比

下方邻群参比是指每个群组以编号比自己小的相邻一个群组作为参考集。例如，如果共有 3 个群组，那么 Cluster 3 的参考集是 Cluster 2，Cluster 2 的参考集是 Cluster 1，Cluster 1 不作为被评价群组（见图 7-5）。

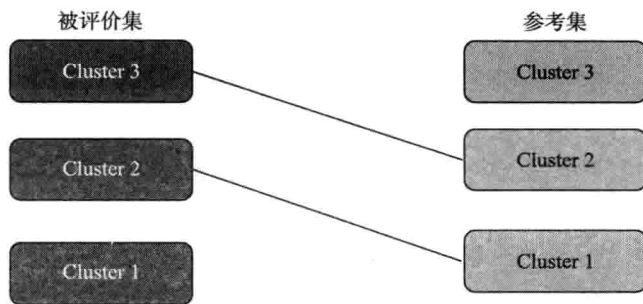


图 7-5 下方邻群参比

通过这一方法可以获得面板数据 Malmquist 模型的分析结果中没有提供的分析细节，详见后面对 Malmquist 模型的介绍。

### 7.2.6 上方邻群参比

上方邻群参比是指每个群组以编号比自己大的相邻一个群组作为参考集。例如，如果共有 3 个群组，那么 Cluster 1 的参考集是 Cluster 2，Cluster 2 的参考集是 Cluster 3，Cluster 3 不作为被评价群组（见图 7-6）。

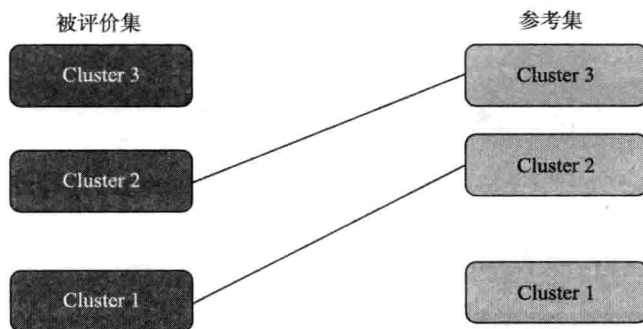


图 7-6 上方邻群参比

这一方法的功能也是可以获得面板数据 Malmquist 模型的分析结果中没有提供的分析细节，详见后面对 Malmquist 模型的介绍。

### 7.2.7 窗口参比

在窗口参比方法中，每个群组以一组编号连续的群组的并集作为参考集，参考集中包含被评价群组自身，参考集中包含的最大群组数量由窗口宽度（用  $d$  表示）决定。窗口默认由被评价 DMU 所在群组及向下的群组构成。可通过

设置偏移量来使窗口向上移动, 假设被评价 DMU 所在群组的编号为  $c$ , 设置偏移量 (用  $f$  表示) 之后, 参考集包括的群组范围为编号  $[c-d+1+f, c+f]$ 。

如果共有 5 个群组, 窗口宽度  $d=2$ , 偏移量  $f=0$ , 各群组的参考集如图 7-7 所示。注意编号靠近两端 (起始和结束) 的被评价群组的参考集为不完整的窗口, 不完整窗口的数量决定于窗口宽度。

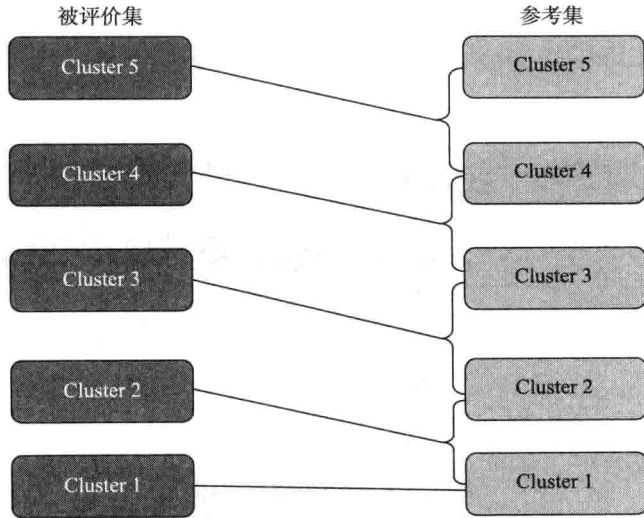


图 7-7 窗口参比 ( $d=2, f=0$ )

如果窗口宽度为  $d=3$ , 偏移量  $f=1$ , 各群组的参考集如图 7-8 所示。

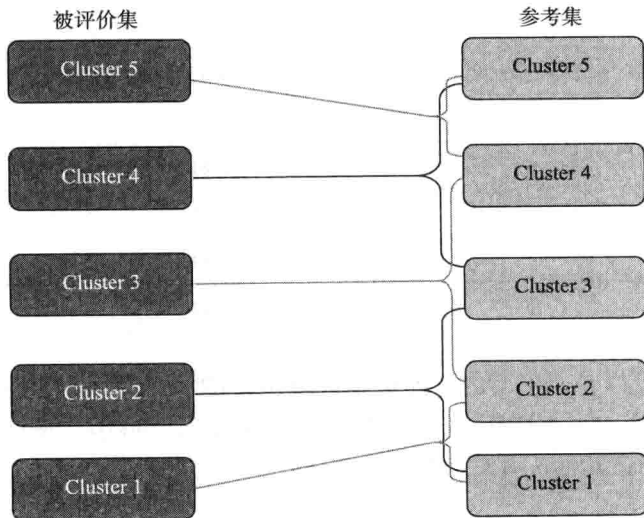


图 7-8 窗口参比 ( $d=3, f=1$ )

窗口参比的功能也是可以获得面板数据 Malmquist 模型的分析结果中没有提供的分析细节, 详见后面对 Window - Malmquist 模型的介绍。

### 7.3 群组参比模型的数据格式

对于群组数据, 必须包含一个表示群组编号的变量, 且变量值必须为整数, 如 1, 2, 3, ...; 但可以是不连续的, 如 1, 2, 5, 8, ...; 2001, 2005, 2009, ...; 200101, 200102, 200302, ...。

在导入群组数据时, 在数据定义界面, 需要将群组编号变量设为 Cluster (见图 7-9)。

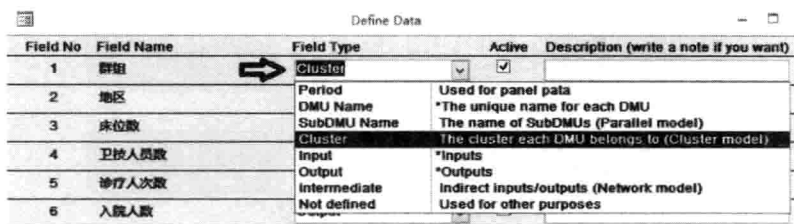


图 7-9 定义群组

下面是群组数据的示例 (见表 7-1)。

表 7-1 群组截面数据示例

DMU	Cluster	Input	Output
A	1	4323	93608
B	1	2295	225559
C	1	6379	327068
D	1	6644	201354
E	1	1436	188926
F	1	6281	413738
G	2	7459	114022
H	2	4464	212444
I	2	4524	462677

群组数据可以是非平衡的, 即每个群组包含的 DMU 数目可以是不同的。对于群组面板数据, 每个 DMU 在不同时期必须属于同一群组。例如, A 在时期 1 属于群组 1, 则在其他所有时期都必须属于群组 1 (见表 7-2)。

表 7-2 群组面板数据示例

Period	DMU	Cluster	Input	Output
1	A	1	4323	93608
1	B	1	6644	201354
1	C	1	7459	114022
1	D	1	2295	225559
1	E	1	1436	188926
1	F	1	4464	212444
1	G	2	6379	327068
1	H	2	6281	413738
1	I	2	4524	462677
2	A	1	4341	93656
2	B	1	6689	201442
2	C	1	7559	114107
2	D	1	2362	225604
2	E	1	1513	188937
2	F	1	4544	212446
2	G	2	6406	327102
2	H	2	6369	413797
2	I	2	4563	462739

## 7.4 MaxDEA 软件求解广义 DEA 模型的操作示例

### 7.4.1 自定义被评价集和参考集

选择模型的距离函数、导向和 RTS 之后，在包络模型或乘数模型的 Advanced Models (1) 界面，勾选 Customized Variable Benchmarks (Generalized DEA)，然后点击 Define，打开被评价集和参考集设置界面（见图 7-10）。

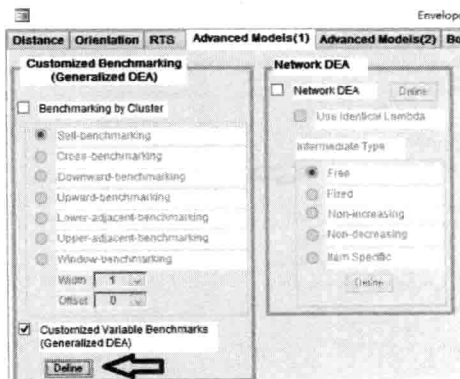


图 7-10 定义被评价集和参考集

在被评价集和参考集设置界面，默认被评价集和参考集均为所有 DMU，Evaluated DMUs 栏是指被评价集，Variable Benchmark /Reference Set 是指参考集。MaxDEA 软件提供了多种方式，方便选择。

(1) 使用箭头所指的两个复选框，可以全选或取消所有 DMU，用户可以在全选和全部取消的基础上进行修改；

(2) 设置选择条件，点击右上方的 Apply 按钮，MaxDEA 软件会按照设置条件自动选择被评价集和参考集，然后用户还可以在此基础上进行修改（见图 7-11）。

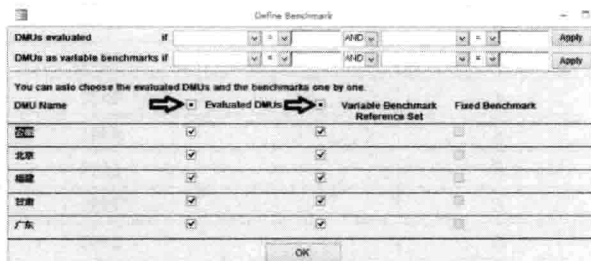


图 7-11 修改被评价集和参考集

#### 7.4.2 Metafrontier 技术缺口比率

根据 Rao 等人（2003），TGR 的计算方法为

$$TGR = \text{Metafrontier 效率值} / \text{群组自我参比效率值}$$

以表 2-6 中的数据为例，计算东、中、西部的 TGR（技术缺口比率）。Metafrontier 效率值即不分组的效率值，参考集为全部省（市、自治区），在 MaxDEA 软件中，即前面介绍的正常 DEA 模型。

计算群组自我参比效率值，在 Advanced Models (1) 界面，勾选 Benchmarking by Cluster，然后选择 Self-benchmarking 即可（见图 7-12）。计算结果见表 7-3。群组参比模型的分析结果是按照群组编号进行排序的，注意在计算 TGR 时要对分析结果重新按 DMU 名称进行排序，以免错行。

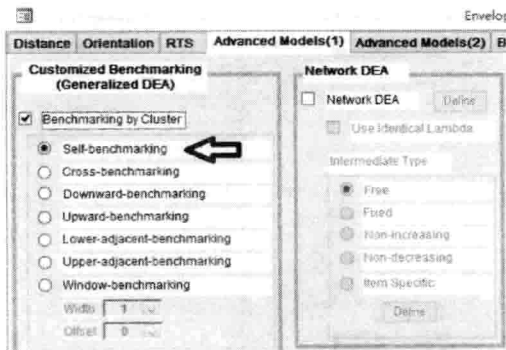


图 7-12 设置自我参比效率



表 7-3 Metafrontier 分析结果 (投入导向 CRS 径向模型)

群 组	地 区	群组内参比效率值	Metafrontier 效率值	TGR
2	安 徽	0.9442	0.9761	0.9674
1	北 京	0.9174	0.9174	1.0000
1	福 建	1.0000	1.0000	1.0000
3	甘 肃	0.8324	0.8374	0.9941
1	广 东	1.0000	1.0000	1.0000
3	广 西	0.9901	1.0000	0.9901

群组: 1 为东部, 2 为中部, 3 为西部。

## 第 8 章 面板数据模型

前面介绍的 DEA 模型都是基于技术效率的概念，是针对某一时间的生产技术而言的。但是生产一般是一个长期的连续的过程，在这一过程中，生产技术本身是在发生变化的（通常技术是不断进步的）。“生产技术是第一生产力”，就是指技术进步对生产率的提高所发挥的关键作用。

当被评价 DMU 的数据为包含多个时间点观测值的面板数据时，就可以对生产率的变动情况、技术效率和技术进步各自对生产率变动所起的作用进行分析，这就是常用的 Malmquist 全要素生产率（Total Factor Productivity, TFP）指数分析。

Malmquist 生产率指数的概念最早源于 Malmquist (1953)，因此将这一类指数命名为 Malmquist 指数。Färe R 等人 (1992) 最早采用 DEA 的方法计算 Malmquist 指数，并将 Malmquist 指数分解为两个方面的变化：一是被评价 DMU 在两个时期内的技术效率的变化（Technical Efficiency Change, EC），二是生产技术的变化（Technological Change, TC），在 DEA 分析中反映生产前沿的变动情况。

除此之外，窗口 DEA 也是常用的面板数据分析方法，它是将一定宽度的时间段（窗口期）内所有 DMU 整体作为参考集，从而使参考集内的数值点（一个数值点可看做一个“DMU”）的数量成倍增加。窗口 DEA 是解决 DMU 数量不足问题的一种有效途径（Charnes A, et al., 1985）。

### 8.1 窗口模型

窗口 DEA (Window DEA)<sup>①</sup> 是将每个 DMU 在各个时期内的数据看做一个相对独立的“DMU”（在此用双引号表示与实际 DMU 相区别），假设共有  $n$  个 DMU， $p$  个时期，则“DMU”的总数为  $np$ 。

如果窗口的宽度为  $d$  ( $d \leq p$ )，则窗口的数量为  $w = p - d + 1$ 。每个窗口内的“DMU”数量为  $nd$ ，相当于每个时期的 DMU 数量的  $d$  倍。增加“DMU”的数量是窗口模型的最明显的功能。

---

<sup>①</sup> 此处的 Window 在中文 DEA 文献中多翻译为“视窗”，这移植于“视窗操作系统 Windows”。Windows 操作系统是可视化窗口操作，所以称为“视窗”很贴切。但 DEA 模型中的 Window 是指包含多个时期的一个窗口期，并没有可视的含义，所以翻译为“窗口”或“窗口期”更为恰当。这类模型中文可以称为“窗口数据包络分析（窗口 DEA）”或“窗口期数据包络分析”、“数据包络分析窗口模型”等。

如果窗口宽度设置为 1, 窗口内的“DMU”数量最少, 等于实际的 DMU 数量, 相当于将各时期的数据分离, 然后分别对各期的“DMU”进行分析; 如果窗口宽度设置为  $p$ , 窗口内的“DMU”数量最多, 相当于所有时期的“DMU”汇总成一个总的参考集, 然后所有“DMU”均以此为参考集进行分析。

在 MaxDEA 软件中进行窗口 DEA 分析, 设置 DEA 模型的距离函数、导向和规模收益类型之后, 在 Advanced Models (2) 界面勾选 Window, 并从下拉列表中选择窗口的宽度即可 (见图 8-1)。Window 模型的分析结果与普通 DEA 模型相同。

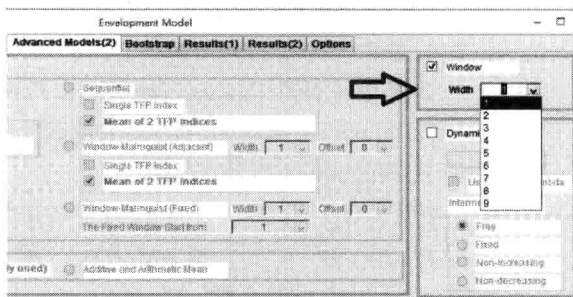


图 8-1 设置 Window 模型

与普通 DEA 模型相比, Window 模型的区别仅仅是参考集的变化, 因此 Window 模型可以与前面介绍的各类 DEA 模型组合应用 (包括各类包络模型和乘数模型), 如包含非期望产出的 MinDS - Window 模型, 只需全部选择相应的选项即可。

## 8.2 Malmquist 模型

### 8.2.1 相邻参比 Malmquist 指数 (Adjacent Malmquist)

(1) 相邻前沿交叉参比 (两个 Malmquist 指数的几何平均)。

先用图示来说明 Malmquist 生产率指数计算的原理。图 8-2 以投入导向 CRS 模型 (两项投入一项产出) 为例显示了两个时期各自的前沿, 分别用上标 1 和 2 表示时期 1 和时期 2 的数据, 时期 1 的前沿由  $A^1B^1C^1$  构成, 时期 2 的前沿由  $A^2B^2C^2$  构成。

分析被评价 DMU<sub>k</sub> 在两个时期的生产率变化, 需要参考生产前沿得出其在两个时期的生产效率。现在有两个生产前沿可用, 分别为时期 1 的前沿和时期 2 的前沿 (简称前沿 1 和前沿 2), 参考不同前沿得出的生产效率值是不同的。

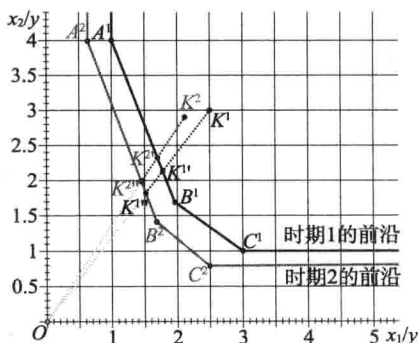


图 8-2 Malmquist 生产率指数示意图 (投入导向 CRS)

参考前沿 1,  $K$  的 Malmquist 生产率指数为<sup>①</sup>:

$$E^1(K^1) = \frac{OK^{1'}}{OK^1}, E^1(K^2) = \frac{OK^{2'}}{OK^2} \frac{E^1(K^2)}{E^1(K^1)} = \frac{OK^{2'}/OK^2}{OK^{1'}/OK^1} \quad (8-1)$$

参考前沿 2,  $K$  的 Malmquist 生产率指数为:

$$E^2(K^1) = \frac{OK^{1''}}{OK^1}, E^2(K^2) = \frac{OK^{2''}}{OK^2}, \frac{E^2(K^2)}{E^2(K^1)} = \frac{OK^{2''}/OK^2}{OK^{1''}/OK^1} \quad (8-2)$$

$E^{\text{参考集}}$  (被评价 DMU) 表示 DEA 模型得出的效率值, 上标为 1 表示参考集为时期 1 的“DMU”, 上标为 2 表示参考集为时期 2 的“DMU”, 被评价 DMU 在前沿 1 上的投影用'表示, 在前沿 2 上的投影用''表示。

分别参考前沿 1 和前沿 2 得出了两个 Malmquist 指数, Färe R 等人 (1992) 采用 Caves 等人 (1982) 计算 Malmquist 指数的方法, 采用两个 Malmquist 指数的几何平均值作为被评价 DMU 的 Malmquist 指数, 即<sup>②</sup>

$$M_{ac}(K^2, K^1) = \sqrt{\frac{E^1(K^2)}{E^1(K^1)} \frac{E^2(K^2)}{E^2(K^1)}} = \sqrt{\frac{OK^{2'}/OK^2}{OK^{1'}/OK^1} \frac{OK^{2''}/OK^2}{OK^{1''}/OK^1}} \quad (8-3)$$

从时期  $t$  到  $t+1$  的 Malmquist 指数表示为<sup>③</sup>

$$M_{ac}(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t) = \sqrt{\frac{E^t(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^t(x^t, y^t)} \frac{E^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^{t+1}(x^t, y^t)}} \quad (8-4)$$

在 Malmquist 的计算公式中,  $E^t(x^t, y^t)$  和  $E^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})$  分别是  $K$  在两个时期的技术效率值, Färe R 等人 (1992) 将其作为两个时期的技术效率变化:

$$EC = \frac{E^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^t(x^t, y^t)} \quad (8-5)$$

前沿 2 与前沿 1 相比向前的移动情况可以由  $\frac{OK_1'}{OK_1} = \frac{E^1(x^1, y^1)}{E^2(x^1, y^1)}$  和  $\frac{OK_2'}{OK_2} =$

① 请读者不要被后面看似眼花缭乱字母数字所迷惑, 其实后面这些公式并不涉及复杂的数学表达式, 仅仅是一些比值, 对照图 8-2 很容易理解其含义。为方便理解, 在后面的表述中均采用  $E^{\text{参考集}}$  (被评价 DMU) 表示通过 DEA 模型得出的效率值, 即 MaxDEA 软件分析结果中的 Score。

② 本节中各类 Malmquist 指数字母简称:

相邻前沿交叉参比 Malmquist 指数 (adjacent cross reference Malmquist):  $M_{ac}$

相邻联合前沿参比 Malmquist 指数 (adjacent joint reference Malmquist):  $M_{aj}$

固定参比 Malmquist 指数 (fixed reference Malmquist):  $M_f$

全局参比 Malmquist 指数 (global reference Malmquist):  $M_g$

序列前沿交叉参比 Malmquist 指数 (sequential cross reference Malmquist):  $M_{sc}$

序列联合前沿参比 Malmquist 指数 (sequential joint reference Malmquist):  $M_{sj}$

窗口参比 Malmquist 指数 (window reference Malmquist):  $M_w$

窗口前沿交叉参比 Malmquist 指数 (window cross reference Malmquist):  $M_{wc}$

窗口联合前沿参比 Malmquist 指数 (window joint reference Malmquist):  $M_{wj}$

窗口固定参比 Malmquist 指数 (window fixed reference Malmquist):  $M_{wf}$

③ 在本章中,  $x^t, y^t$  和  $x^{t+1}, y^{t+1}$  分别表示被评价 DMU<sub>k</sub> 在时期  $t$  和  $t+1$  的数值, 完整的表示应该为  $x_k^t, y_k^t$  和  $x_k^{t+1}, y_k^{t+1}$ , 简化是为了便于阅读。在 MaxDEA 软件的输出结果中, 无论是投入导向还是产出导向, Malmquist 指数的含义均为, 大于 1 表示生产率提高, 小于 1 表示生产率降低; 效率变化 (EC) 和技术变化 (TC) 的含义也是如此。

$\frac{E^1(x^2, y^2)}{E^2(x^2, y^2)}$  反映, 比值大于 1 表示前沿前移, 小于 1 表示前沿后退, 前沿的前移

代表着技术进步。Färe R 等人 (1992) 用其几何平均值作为技术变化:

$$TC_{ac} = \sqrt{\frac{E^t(x^t, y^t)}{E^{t+1}(x^t, y^t)} \frac{E^t(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}} \quad (8-6)$$

Malmquist 指数、效率变化和技术变化三者之间的数量关系为  $MI = EC * TC$ , 即 Malmquist 指数可以分解为效率变化和技术变化两部分。

$$\begin{aligned} M_{ac} &= \sqrt{\frac{E^t(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^t(x^t, y^t)} \frac{E^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^{t+1}(x^t, y^t)}} \\ &= \frac{E^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^t(x^t, y^t)} \sqrt{\frac{E^t(x^t, y^t)}{E^{t+1}(x^t, y^t)} \frac{E^t(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}} \end{aligned}$$

需要注意的是, 在实际应用中, 被评价 DMU 往往来自一个较小的样本, 即使从理论上讲, 被评价生产技术是随着时间不断进步的, 但是样本的前沿未必一定前移, DEA 模型得出的技术变化并不一定是技术进步。

在上述 Malmquist 指数的计算中涉及跨期的参比, 被评价 “DMU” 为  $K^t = (x_k^t, y_k^t)$  而参考集为  $S^{t+1} = \{(x_j^{t+1}, y_j^{t+1}), j = 1, 2, \dots, n\}$  (被评价 “DMU” 在时期  $t$ , 而参考集为时期  $t+1$ ); 或者相反, 被评价 “DMU” 为  $K^{t+1} = (x_k^{t+1}, y_k^{t+1})$  而参考集为  $S^t = \{(x_j^t, y_j^t), j = 1, 2, \dots, n\}$  (评价 “DMU” 在时期  $t+1$ , 而其参考集为时期  $t$ )<sup>①</sup>。被评价 “DMU” 并不在参考集内, 这相当于超效率模型。

前面介绍过, VRS 超效率模型存在无可行解的问题, 同样 VRS Malmquist 模型也存在无可行解的问题, 即 VRS 模型中  $E^{t+1}(x^t, y^t)$  和  $E^t(x^{t+1}, y^{t+1})$  的计算可能出现无可行解的问题。对无可行解的问题, 一种方案是采用前面介绍的解决方法, 另一种方案是采用不存在无可行解问题的 Malmquist 指数计算方法, 详见后面的介绍。

相邻参比的 Malmquist 指数不具备可传递性, 相邻时期的 Malmquist 指数不可累乘。例如

$$M_{ac}(2, 1) \times M_{ac}(3, 2) \neq M_{ac}(3, 1)$$

\* (2) 相邻联合前沿参比 (单一 Malmquist 指数)。

为了解决由于跨期参比而出现 VRS Malmquist 模型无可行解的问题, 可以用相邻两个时期的 “DMU” 联合构建共同的前沿, 即

无论被评价 “DMU” 为  $K^t = (x_k^t, y_k^t)$  还是  $K^{t+1} = (x_k^{t+1}, y_k^{t+1})$ , 其参考集均为  $S^{oj} = S^t \cup S^{t+1} = \{(x_j^t, y_j^t)\} \cup \{(x_j^{t+1}, y_j^{t+1})\}$ 。

由于采用了两个时期的联合共同前沿, 所以得出的 Malmquist 指数只有一个, 无须再通过计算两个生产率指数然后取其几何平均值的计算方式, 即

① 在后面对参考集的表述中简化为  $S^t = \{(x_j^t, y_j^t)\}$ 。

$$M_{aj}(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t) = \frac{E^{t \cup (t+1)}(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^{t \cup (t+1)}(x^t, y^t)} \quad (8-7)$$

虽然相邻的两期在计算 Malmquist 指数时参考的是同一前沿，但是两期仍然有各自的前沿，效率变化 (EC) 的计算仍然采用各自的前沿：

$$EC = \frac{E^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^t(x^t, y^t)}。$$

前沿  $t+1$  与联合前沿接近的程度可由  $\frac{E^{t \cup (t+1)}(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}$  来表示，比值越接近 1 说明前沿  $t+1$  与联合前沿越接近；前沿  $t$  与联合前沿接近的程度可由  $\frac{E^{t \cup (t+1)}(x^t, y^t)}{E^t(x^t, y^t)}$  来表示，比值越接近 1 说明前沿  $t$  与联合前沿越接近。那么前沿  $t+1$  与前沿  $t$  相比，其变动情况则可以由两个比值的比值来表示：

$$\begin{aligned} TC_{aj} &= \frac{E^{t \cup (t+1)}(x^{t+1}, y^{t+1})/E^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^{t \cup (t+1)}(x^t, y^t)/E^t(x^t, y^t)} \\ &= \frac{E^{t \cup (t+1)}(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})} \frac{E^t(x^t, y^t)}{E^{t \cup (t+1)}(x^t, y^t)} \end{aligned} \quad (8-8)$$

Malmquist 指数可分解为效率变化和技术变化：

$$\begin{aligned} M_{aj}(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t) &= \frac{E^{t \cup (t+1)}(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^{t \cup (t+1)}(x^t, y^t)} \\ &= \frac{E^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^t(x^t, y^t)} \left( \frac{E^{t \cup (t+1)}(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})} \frac{E^t(x^t, y^t)}{E^{t \cup (t+1)}(x^t, y^t)} \right) \\ &= EC \times TC_{aj} \end{aligned} \quad (8-9)$$

相邻联合前沿参比 Malmquist 解决了 VRS 模型的无可行解问题，但是它也不具备可传递性，相邻时期的 Malmquist 指数不可累乘。例如

$$M_{aj}(2, 1) \times M_{aj}(3, 2) \neq M_{aj}(3, 1)$$

### 8.2.2 固定参比 Malmquist 指数 (Fixed Malmquist)

固定参比 Malmquist 模型是由 Berg 等人 (1992) 提出的一种 Malmquist 指数计算方法，它是以某一固定时期作为参考集，即各期共同的参考集为

$$S^f = \{(x_j^f, y_j^f)\}, f \text{ 为 } 1 \sim p \text{ 的数。}$$

因为各期参考的前沿是固定的，因此计算得出的是单一 Malmquist 指数。

$$M_f(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t) = \frac{E^f(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^f(x^t, y^t)} \quad (8-10)$$

虽然相邻的两期在计算 Malmquist 指数时参考的是同一前沿，但是效率变化的计算仍然采用各自的前沿：

$$EC = \frac{E^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^t(x^t, y^t)}$$

前沿  $t+1$  与固定前沿接近的程度可由  $\frac{E^f(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}$  来表示，比值越大说明

前沿  $t+1$  与固定前沿越接近；前沿  $t$  与固定前沿接近的程度可由  $\frac{E^f(x^t, y^t)}{E^t(x^t, y^t)}$  来表示，比值越大说明前沿  $t$  与固定前沿越接近；前沿  $t+1$  与前沿  $t$  相比，其变动情况则可以由两个比值的比值来表示：

$$TC_f = \frac{E^f(x^{t+1}, y^{t+1})/E^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^f(x^t, y^t)/E^t(x^t, y^t)} = \frac{E^f(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})} \frac{E^t(x^t, y^t)}{E^f(x^t, y^t)} \quad (8-11)$$

Malmquist 指数可分解为效率变化和技术变化：

$$\begin{aligned} M_f(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t) &= \frac{E^f(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^f(x^t, y^t)} \\ &= \frac{E^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^t(x^t, y^t)} \left( \frac{E^f(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})} \frac{E^t(x^t, y^t)}{E^f(x^t, y^t)} \right) \\ &= EC \times TC_f \end{aligned} \quad (8-12)$$

固定参比 Malmquist 指数也存在与本期以外的前沿进行参比，因此其 VRS 模型也存在无可解问题。

由于各期参考的是固定前沿，因此固定参比 Malmquist 指数具备传递性，可累乘，例如

$$M_f(2, 1) \times M_f(3, 2) = M_f(3, 1)。$$

### 8.2.3 全局参比 Malmquist 指数 (Global Malmquist)

全局参比 Malmquist 模型是由 Pastor 和 Lovell (2005) 提出的一种 Malmquist 指数计算方法。它是以所有各期的总和作为参考集，即各期共同的参考集为

$$S^g = S^1 \cup S^2 \cup \dots \cup S^p = \{(x_j^1, y_j^1)\} \cup \{(x_j^2, y_j^2)\} \cup \dots \cup \{(x_j^p, y_j^p)\}$$

由于各期参考的是同一前沿，因此计算得出的也是单一 Malmquist 指数。

$$M_g(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t) = \frac{E^g(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^g(x^t, y^t)} \quad (8-13)$$

虽然相邻的两期在计算 Malmquist 指数时参考的是同一全局前沿，但是效率变化的计算仍然采用各自的前沿：

$$EC = \frac{E^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^t(x^t, y^t)}$$

前沿  $t+1$  与全局前沿接近的程度可由  $\frac{E^g(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}$  来表示，比值越大说明

前沿  $t+1$  与全局前沿越接近；前沿  $t$  与全局前沿接近的程度可由  $\frac{E^g(x^t, y^t)}{E^t(x^t, y^t)}$  来表示，比值越大说明前沿  $t$  与全局前沿越接近；前沿  $t+1$  与前沿  $t$  相比，其变动情况则可以由两个比值的比值来表示：

$$TC_g = \frac{E^g(x^{t+1}, y^{t+1})/E^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^g(x^t, y^t)/E^t(x^t, y^t)} = \frac{E^g(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})} \frac{E^t(x^t, y^t)}{E^g(x^t, y^t)} \quad (8-14)$$

Malmquist 指数可分解为效率变化和技术变化：

$$M_g(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t) = \frac{E^g(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^g(x^t, y^t)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{E^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^t(x^t, y^t)} \left( \frac{E^g(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})} \frac{E^t(x^t, y^t)}{E^g(x^t, y^t)} \right) \\
 &= EC \times TC_g \quad (8-15)
 \end{aligned}$$

由于被评价“DMU”肯定包含在全局参考集内，所以全局参比 Malmquist 指数不存在 VRS 模型无可行解问题。

同时，由于各期参考的是共同的全局前沿，因此全局参比 Malmquist 指数也具备传递性，可累乘，例如

$$M_g(2, 1) \times M_g(3, 2) = M_g(3, 1)。$$

#### 8.2.4 序列参比 Malmquist 指数 (Sequential Malmquist)

序列参比 Malmquist 模型是由 Shestalova (2003) 提出的一种 Malmquist 指数计算方法。它的特点是各期的参考集包含以前所有时期的参考集，即  $t$  期的参考集为

$$S^{(t)} = S^1 \cup S^2 \cup \dots \cup S^t = \{(x_j^1, y_j^1)\} \cup \{(x_j^2, y_j^2)\} \cup \dots \cup \{(x_j^t, y_j^t)\}$$

在前面介绍的相邻参比、固定参比和全局参比中，相邻两期各自的前沿均由本期的“DMU”构成。序列参比则不同，前沿都由本期及所有以前各期的“DMU”构成，构建  $t+1$  期前沿的“DMU”中包含了  $t$  期的“DMU”，因此  $t+1$  期的前沿与  $t$  期相比，肯定不会后退，这是序列 Malmquist 模型的重要特征。

前面介绍的参比类型，其效率变化的计算公式是相同的；序列参比由于采用序列前沿，其效率变化采用了形式相似但结果不同的计算公式。

当参考集扩大之后，采用径向、SBM、方向距离函数、MinDW、混合距离的 DEA 模型，得出的效率值不变或减小。因此，序列 Malmquist 模型得出的技术变化值不会小于 1，即总是呈现技术进步。

但是，前面解释过，MinDS 模型的一个特性是当参考集扩大后得出的效率值有可能增大（减小、不变和增加三种情况均存在），这一点是其他类型的距离函数所没有的。所以，当选择 MinDS 距离时，序列 Malmquist 模型得出的技术变化值可能会小于 1（小于 1、等于 1、大于 1 三种情况都会出现），即仍然会出现技术退步的结果。因此，如果不希望结果中出现技术退步，在序列 Malmquist 模型中不要使用 MinDS 距离类型。

与相邻参比相同，序列参比 Malmquist 指数的计算也存在着两个前沿，有两种计算方法：一种方法是按照 Caves 等人 (1982) 的方法采用两个 Malmquist 指数的几何平均值作为被评价 DMU 的 Malmquist 指数；另一种方法是按照联合前沿的方法，得出单一的 Malmquist 指数。两种方法的效率变化计算公式相同。

(1) 序列前沿交叉参比 (两个 Malmquist 指数的几何平均)。

$$M_{sc}(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t) = \sqrt{\frac{E^{s(t)}(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^{s(t)}(x^t, y^t)} \frac{E^{s(t+1)}(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^{s(t+1)}(x^t, y^t)}} \quad (8-16)$$

$$EC_s = \frac{E^{s(t+1)}(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^{s(t)}(x^t, y^t)} \quad (8-17)$$



$$TC_{sc} = \sqrt{\frac{E^{s(t)}(x^t, y^t) E^{s(t)}(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^{s(t+1)}(x^t, y^t) E^{s(t+1)}(x^{t+1}, y^{t+1})}} \quad (8-18)$$

$$M_{sc} = EC_s \times TC_{sc}$$

序列前沿交叉参比模型存在 VRS 模型无可解问题, 因为  $E^{s(t)}(x^{t+1}, y^{t+1})$  在 VRS 模型中存在无可解问题。

序列前沿交叉参比 Malmquist 指数不具备传递性。

\* (2) 序列联合前沿参比 (单一 Malmquist 指数)。

由于  $t+1$  期的参考集包含了  $t$  期的参考集, 即  $S^{s(t)} \subset S^{s(t+1)}$ ,  $t+1$  期的前沿可作为两期的联合前沿。

$$M_{sj}(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t) = \frac{E^{s(t+1)}(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^{s(t+1)}(x^t, y^t)} \quad (8-19)$$

$$EC_s = \frac{E^{s(t+1)}(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^{s(t)}(x^t, y^t)}$$

$$TC_{sj} = \frac{E^{s(t)}(x^t, y^t)}{E^{s(t+1)}(x^t, y^t)} \quad (8-20)$$

$$M_{sc} = EC_s \times TC_{sc}$$

序列联合前沿参比 Malmquist 指数不存在 VRS 模型无可解问题, 但是不具备传递性。

### 8.2.5 窗口参比 Malmquist 指数 (Window Malmquist)

窗口 Malmquist 模型是将窗口 DEA 的方法应用于 Malmquist 模型, 参考集是由多个时期构成的窗口 (Asmild, et al., 2004; Rezitis, 2010; Sun, 2011)。

窗口的构成由窗口宽度 ( $d$ ) 和偏移量 ( $f$ ) 决定。窗口默认由  $t$  及  $t$  以前的  $d-1$  个时期构成, 即  $w(t) = \{t, t-1, \dots, t-d+1\}$ 。可通过设置偏移量来使窗口发生移动,  $w(t) = \{t+f, t-1+f, \dots, t-d+1+f\}$ 。

根据参考集窗口的类型, 窗口参比 Malmquist 指数可分为以下三种形式。

(1) 窗口前沿交叉参比 Malmquist 指数, 与相邻前沿交叉参比 Malmquist 指数计算方法相似, 相同之处是两个相邻的时期有两个参比前沿, 存在交叉参比; 区别在于前者的两个前沿分别由两个窗口 ( $t$  的窗口和  $t+1$  的窗口) 内的“DMU”构成, 而后者的两个前沿分别由两个时期 (时期  $t$  和时期  $t+1$ ) 内的“DMU”构成。

当窗口宽度  $d=1$  时, 窗口前沿交叉参比 Malmquist 模型等价于相邻前沿交叉参比 Malmquist 模型; 当窗口宽度  $d=p$ , 偏移量  $f=0$  时, 窗口前沿交叉参比 Malmquist 模型等价于序列前沿交叉参比 Malmquist 模型。

(2) 窗口联合前沿参比 Malmquist 指数, 与相邻联合前沿参比 Malmquist 指数类似, 相同之处是两个相邻的时期均参考同一个前沿, 不存在交叉参比; 区别在于前者的前沿是由两个窗口内的“DMU”联合构成, 而后者的前沿是由两个时期内的“DMU”联合构成。

当窗口宽度  $d=1$  时, 窗口联合前沿参比 Malmquist 模型等价于相邻联合前沿参比 Malmquist 模型; 当窗口宽度  $d=p$ , 偏移量  $f=0$  时, 窗口联合前沿参比 Malmquist 模型等价于序列联合前沿参比 Malmquist 模型。

(3) 窗口固定参比 Malmquist 指数, 与固定参比 Malmquist 指数类似, 相同之处是两个相邻的时期均参考同一个前沿, 不存在交叉参比; 区别在于前者的前沿是由一个固定窗口内的“DMU”构成, 而后者的前沿是由一个固定时期内的“DMU”构成。

当窗口宽度为 1 时, 窗口固定参比 Malmquist 模型等价于固定参比 Malmquist 模型。

三种窗口 Malmquist 模型得出的效率变化值相同, 均用  $EC_w$  表示。

(1) 窗口前沿交叉参比 (两个 Malmquist 指数的几何平均)。

$$M_{wc}(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t) = \sqrt{\frac{E^{w(t)}(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^{w(t)}(x^t, y^t)} \frac{E^{w(t+1)}(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^{w(t+1)}(x^t, y^t)}} \quad (8-21)$$

$$EC_w = \frac{E^{w(t+1)}(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^{w(t)}(x^t, y^t)} \quad (8-22)$$

$$TC_{wc} = \sqrt{\frac{E^{w(t)}(x^t, y^t)}{E^{w(t+1)}(x^t, y^t)} \frac{E^{w(t)}(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^{w(t+1)}(x^{t+1}, y^{t+1})}} \quad (8-23)$$

$$M_{wc} = EC_w \times TC_{wc}$$

当  $w(t)$  没有包含时期  $t+1$  时, VRS 模型中  $E^{w(t)}(x^{t+1}, y^{t+1})$  的计算存在无可行解问题; 当  $w(t+1)$  没有包含时期  $t$  时,  $E^{w(t+1)}(x^t, y^t)$  的计算存在无可行解问题。当窗口宽度  $d \geq 3$ , 偏移量  $f=1$  时, 不存在 VRS 模型可行解的问题。

窗口前沿交叉参比 Malmquist 指数不具备传递性。

\* (2) 窗口联合前沿参比 (单 - Malmquist 指数)。

采用两个窗口联合构成的参考集作为共同的参考集, 即

$$S^{wj} = S^{w(t)} \cup S^{w(t+1)}$$

$$M_{wj}(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t) = \frac{E^{w(t) \cup w(t+1)}(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^{w(t) \cup w(t+1)}(x^t, y^t)} \quad (8-24)$$

$$EC_w = \frac{E^{w(t+1)}(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^{w(t)}(x^t, y^t)}$$

$$TC_{wj} = \frac{E^{w(t) \cup w(t+1)}(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^{w(t+1)}(x^{t+1}, y^{t+1})} \frac{E^{w(t)}(x^t, y^t)}{E^{w(t) \cup w(t+1)}(x^t, y^t)} \quad (8-25)$$

$$M_{wj} = EC_w \times TC_{wj}$$

窗口联合前沿参比 Malmquist 指数不存在 VRS 模型无可行解问题, 但是不具备传递性。

\* (3) 窗口固定参比。

所有各期均以某一固定窗口作为参考集, 即

$$S^{wf(t)} = S^{w(f)}$$

$$M_{wf}(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t) = \frac{E^{w(f)}(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^{w(f)}(x^t, y^t)} \quad (8-26)$$

$$EC_w = \frac{E^{w(t+1)}(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^{w(t)}(x^t, y^t)}$$

$$TC_{wf} = \frac{E^{w(f)}(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^{w(t+1)}(x^{t+1}, y^{t+1})} \frac{E^{w(t)}(x^t, y^t)}{E^{w(f)}(x^t, y^t)} \quad (8-27)$$

$$M_{wf} = EC_w \times TC_{wf}$$

窗口固定参比 Malmquist 指数也存在与本期以外的前沿进行参比, 因此其 VRS 模型也存在无可行解问题。

由于各期参考的是同一前沿, 因此窗口固定参比 Malmquist 指数具备传递性, 可累乘, 例如

$$M_{wf}(2,1) \times M_{wf}(3,2) = M_{wf}(3,1)。$$

### 8.2.6 各类 Malmquist 指数比较

(1) 相邻前沿交叉参比是应用最早、最多的 Malmquist 指数, 虽然存在 VRS 模型无可行解问题, 但是可以采用前面介绍的解决 VRS 模型无可行解问题的方法<sup>①</sup>。

(2) 全局参比和相邻、序列、窗口联合前沿 Malmquist 模型不存在 VRS 模型无可行解问题。

(3) 序列 Malmquist 可以避免出现技术退步的结果 (MinDS 距离类型除外)。

(4) 全局、序列和窗口 Malmquist 指数的计算相当于增加了“DMU”数量, 在 DMU 数量不足时, 可采用这三类模型提高结果的区分度。需要注意的是, 序列 Malmquist 模型中, “DMU”数量的增加在各期并不均匀, 第 1 期没有增加, 越往后增加越多, 末期增加最多, 达到和全局 Malmquist 模型相同的“DMU”数量。

(5) 固定、全局和窗口固定 Malmquist 模型得出的各期的效率值  $E$  具有可比性, 可以制作折线图、柱状图等, 直观地观察各时期的生产率变化情况。例如图 8-3 是利用全局 Malmquist 模型得出的 2003~2011 年东、中、西部医院生产率变化情况 (图中数据为各期的全局参比效率值  $E^g$ )。

各类 Malmquist 指数比较如表 8-1 所示。

<sup>①</sup> 在应用这类 Malmquist 模型的文献中, 一般没有提及无可行解问题, 实际上往往在无可行解时将效率值  $E$  设为 1。

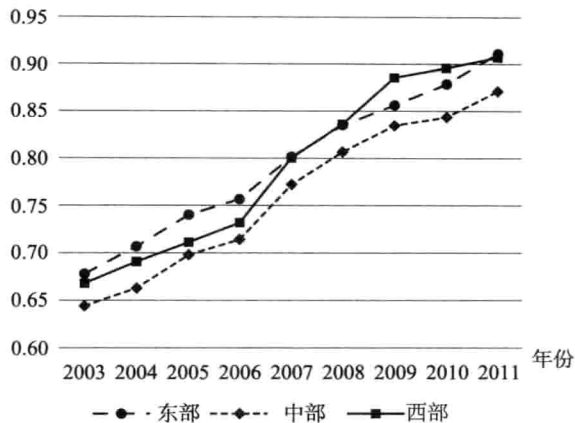


图 8-3 2003 ~ 2011 年东、中、西部医院生产率变化情况

表 8-1 各类 Malmquist 指数比较

参比方式	前沿类型	Malmquist 指数计算	传递性	VRS 无可行解问题
相邻	前沿交叉	两个指数几何平均	否	存在
	联合前沿	单一指数	否	不存在
固定	—	单一指数	是	存在
全局	—	单一指数	是	不存在
序列	前沿交叉	两个指数几何平均	否	存在
	联合前沿	单一指数	否	不存在
窗口	前沿交叉	两个指数几何平均	否	通过窗口设置可避免
	联合前沿	单一指数	否	不存在
	固定	单一指数	是	存在

有文献指出，各时期的“DMU”不应参比未来时间的技术，意思是说各期的参考集应为本期或本期及以前的各期。这种观点是将截面 DEA 模型中投影（目标值）分析对参考集的要求搬到面板数据生产率的分析中来。在投影分析中，如果参考的技术是被评价 DMU 所不可及的，则得出的目标值将是被评价 DMU 难以实现的，从而使目标值失去指导意义。而在面板数据的 Malmquist 生产率指数分析中，并不涉及投影分析，而是对两个时期的“DMU”通过参比同一个或两个参考集来得出生产率的变化情况。参考集仅仅是两个时期比较时采用的参照物，被评价的“DMU”并不需要一定能达到这个参照物的水平。例如，中国大部分地区目前的空气质量很差，世界卫生组织（WHO）制定的空气质量标准中对 PM2.5 的指导标准是年平均  $10\mu\text{g}/\text{m}^3$ ，日平均  $25\mu\text{g}/\text{m}^3$ ，这一标准是中国大部分地区目前难以甚至是不可能达到的，但这不能说中国在对空气质量进行评价时，特别是对空气质量对健康的影响进行评价时不能采用 WHO 的质量标准，因为评价的目的是首先要了解中国的空气质量离对健康没有影响的标准有多远，

而不是制定我们近期的空气质量目标。同样，在 Malmquist 模型中，分析的目的在于了解两个时期之间生产率变化有多大，只要是两个时期参考同一个标准，就能得出合理的结果。

但是在 DEA 的实际应用中，DMU 的数量往往并不是足够多，模型建立的前沿有时候只有几个 DMU 构成，前沿不够精细，得出的结果可靠性或稳定性差。在这种情况下，选择可以增加“DMU”数量的 Malmquist 模型，如全局参比、序列参比和窗口参比，可以达到提高前沿精细度的目的，从而提高结果的可靠性和稳定性。

不同 Malmquist 模型分析结果的差异很大程度是缘于 DMU 数量没有足够多而导致的前沿过于粗糙，从理论上讲，随着 DMU 数量的增加（假设数据没有误差），不同类型的 Malmquist 指数的差异性会减小。

如果要对各期进行投影分析，应采用本期的参考集，可采用 Window 模型并设置窗口宽度为 1。

从前面对各类 Malmquist 指数的计算方法可以看出，所有 Malmquist 指数的计算均涉及对未来时期的参比。要避免对未来的参比，可以在前沿交叉（相邻、序列、窗口）类型中，舍弃对  $t+1$  期前沿的参比，即两个时期只参比  $t$  期的前沿，计算得出单一的 Malmquist 指数，这样才能避免对未来的参比。

### 8.3 MaxDEA 软件中各类 Malmquist 模型的操作

在 MaxDEA 软件中，Malmquist 类型的选项在 Advanced Models (2) 界面（见图 8-4）。

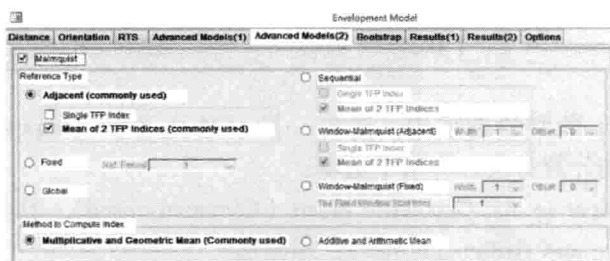


图 8-4 设置 Malmquist 模型

与普通 DEA 模型相比，Malmquist 模型的区别仅仅是参考集的变化，因此 Malmquist 模型可以与前面介绍的各类 DEA 模型组合应用（包括各类包络模型和乘数模型）。

在选择 DEA 模型的距离函数、导向和 RTS 及在 Advanced Models (1) 界面的选项之后，在 Advanced Models (2) 界面，选择采用的 Malmquist 类型（见表 8-2）。

表 8-2 各类 Malmquist 模型在 MaxDEA 软件中的设置

参比方式	前沿类型	MaxDEA 软件中的设置 (Reference Type)
相邻	前沿交叉	Adjacent (Commonly Used) Mean of 2 TFP Indices (Commonly Used)
	联合前沿	Adjacent (Commonly Used) Single TFP Index
固定	—	Fixed Ref. Period: 设置固定参考的时期
全局	—	Global
序列	前沿交叉	Sequential Mean of 2 TFP Indices
	联合前沿	Sequential Single TFP Index
窗口	前沿交叉	Window Mean of 2 TFP Indices Width: 窗口宽度 Offset: 偏移量
	联合前沿	Window Single TFP Index Width: 窗口宽度 Offset: 偏移量
	固定	Window Single TFP Index Width: 窗口宽度 Offset: 偏移量 The Fixed Window Start from: 选择固定窗口的起点

在 Malmquist 模型的选项中, 还有一项 “Method to Compute Index”, 是指 Malmquist 指数的计算方法, 有两个选项:

- (1) Multiplicative and Geometric Mean (Commonly used): 比值法;
- (2) Additive and Arithmetic Mean: 加减法。

前面介绍的 Malmquist 模型都是采用比值法计算 Malmquist 指数及效率变化和技术变化。Malmquist 指数大于 1 表示生产率提高, 小于 1 表示生产率降低。

如果采用加减法, 指数大于 0 表示生产率提高, 小于 0 表示生产率降低。这种计算方式最早被 Chambers 等人 (1996) 使用并将得出的生产率指数命名为 Luenberger 生产率指数。例如, 相邻前沿交叉参比 Luenberger 生产率指数表示为

$$L(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t) = 0.5 \times [E^t(x^{t+1}, y^{t+1}) - E^t(x^t, y^t) + E^{t+1}(x^{t+1}, y^{t+1}) - E^{t+1}(x^t, y^t)]$$

Chambers 等人 (1996) 当时采用加减法是因为生产率指数的计算采用的是方向距离函数, 并用  $\beta^*$  计算生产率指数, 而  $\beta^*$  既有正数也有负数, 不适宜使用

比值的方法计算。现在这一方法已很少使用。

## 8.4 MaxDEA 软件中各类 Malmquist 模型的结果

在 MaxDEA 软件中, Malmquist 模型的分析结果选项在 Results (2) 界面 (见图 8-5)。

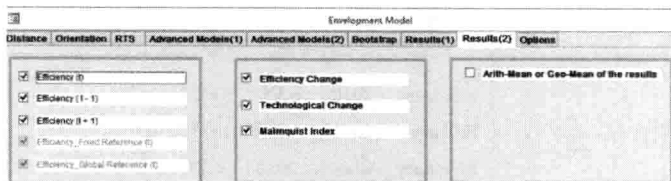


图 8-5 设置 Malmquist 模型的分析结果

在 MaxDEA 软件的输出结果中, 所有类型的 Malmquist 模型的结果均包含:

(1) Malmquist Index ( $t$  TO  $t+1$ ): 表示从  $t$  期到  $t+1$  期的 Malmquist 指数。例如, Malmquist Index (2010 TO 2011) 表示从 2010 年到 2011 年的 Malmquist 指数。

(2) Efficiency Change ( $t$  TO  $t+1$ ): 表示从  $t$  期到  $t+1$  期的效率变化。例如, Efficiency Change (2010 TO 2011) 表示从 2010 年到 2011 年的技术效率变化。

(3) Technological Change ( $t$  TO  $t+1$ ): 表示从  $t$  期到  $t+1$  期的技术变化。例如, Technological Change (2010 TO 2011) 表示从 2010 年到 2011 年的技术变化 (前沿变动)。

表 8-3 以计算 2010~2011 年的 Malmquist 指数为例, 列出了各类 Malmquist 模型计算过程的中间结果及其含义。表 8-4 列出了获取中间指标详细结果 (如参考标杆、投影值等) 的方法。

表 8-3 MaxDEA 输出的各类 Malmquist 模型的中间结果<sup>①</sup>

参比方式	前沿类型	MaxDEA 输出结果及其含义
相邻	前沿交叉	Efficiency (2010) = $E^{2010}(x^{2010}, y^{2010})$
		Efficiency (2011) = $E^{2011}(x^{2011}, y^{2011})$
		Efficiency (2011-1) = $E^{2010}(x^{2011}, y^{2011})$
		Efficiency (2010+1) = $E^{2011}(x^{2010}, y^{2010})$
	联合前沿	Efficiency (2010) = $E^{2010}(x^{2010}, y^{2010})$
		Efficiency (2011) = $E^{2011}(x^{2011}, y^{2011})$
		Efficiency (2011-1) = $E^{2010 \cup 2011}(x^{2011}, y^{2011})$
		Efficiency (2010+1) = $E^{2010 \cup 2011}(x^{2010}, y^{2010})$

① 在联合前沿中, MaxDEA 输出结果 Efficiency ( $t-1$ ) 的参考集为  $t$  期参考集与  $t-1$  期参考集的并集, Efficiency ( $t+1$ ) 的参考集为  $t$  期参考集与  $t+1$  期参考集的并集, 因此 Efficiency (2011-1) 和 Efficiency (2010+1) 的参考集是相同的。

续表

参比方式	前沿类型	MaxDEA 输出结果及其含义
固定	—	$\text{Efficiency (2010)} = E^{2010} (x^{2010}, y^{2010})$ $\text{Efficiency (2011)} = E^{2011} (x^{2011}, y^{2011})$ $\text{Efficiency\_ Fixed (2010)} = E^f (x^{2010}, y^{2010})$ $\text{Efficiency\_ Fixed (2011)} = E^f (x^{2011}, y^{2011})$
全局	—	$\text{Efficiency (2010)} = E^{2010} (x^{2010}, y^{2010})$ $\text{Efficiency (2011)} = E^{2011} (x^{2011}, y^{2011})$ $\text{Efficiency\_ Global (2010)} = E^g (x^{2010}, y^{2010})$ $\text{Efficiency\_ Global (2011)} = E^g (x^{2011}, y^{2011})$
序列	前沿交叉	$\text{Efficiency (2010)} = E^{s(2010)} (x^{2010}, y^{2010})$ $\text{Efficiency (2011)} = E^{s(2011)} (x^{2011}, y^{2011})$ $\text{Efficiency (2011 - 1)} = E^{s(2010)} (x^{2011}, y^{2011})$ $\text{Efficiency (2010 + 1)} = E^{s(2011)} (x^{2010}, y^{2010})$
	联合前沿	$\text{Efficiency (2010)} = E^{s(2010)} (x^{2010}, y^{2010})$ $\text{Efficiency (2011)} = E^{s(2011)} (x^{2011}, y^{2011})$ $\text{Efficiency (2011 - 1)} = E^{s(2010)} (x^{2011}, y^{2011})$ $\text{Efficiency (2010 + 1)} = E^{s(2011)} (x^{2010}, y^{2010})$
窗口	前沿交叉	$\text{Efficiency (2010)} = E^{w(2010)} (x^{2010}, y^{2010})$ $\text{Efficiency (2011)} = E^{w(2011)} (x^{2011}, y^{2011})$ $\text{Efficiency (2011 - 1)} = E^{w(2010)} (x^{2011}, y^{2011})$ $\text{Efficiency (2010 + 1)} = E^{w(2011)} (x^{2010}, y^{2010})$
	联合前沿	$\text{Efficiency (2010)} = E^{w(2010)} (x^{2010}, y^{2010})$ $\text{Efficiency (2011)} = E^{w(2011)} (x^{2011}, y^{2011})$ $\text{Efficiency (2011 - 1)} = E^{w(2010) \cup w(2011)} (x^{2011}, y^{2011})$ $\text{Efficiency (2010 + 1)} = E^{w(2010) \cup w(2011)} (x^{2010}, y^{2010})$
	固定	$\text{Efficiency (2010)} = E^{w(2010)} (x^{2010}, y^{2010})$ $\text{Efficiency (2011)} = E^{w(2011)} (x^{2011}, y^{2011})$ $\text{Efficiency\_ Fixed (2010)} = E^{w(f)} (x^{2010}, y^{2010})$ $\text{Efficiency\_ Fixed (2011)} = E^{w(f)} (x^{2011}, y^{2011})$



表 8-4 MaxDEA 获取中间详细结果的方法

模型类型		获取中间详细结果的方法 <sup>①</sup>
相邻、固定、全局参比的共同结果		$\text{Efficiency}(t) = E^t(x^t, y^t)$ (1) 通过 Window 模型, 将窗口宽度设为 1 (一次获得所有时期的结果) (2) 将面板数据转换为截面数据, 然后通过群组“自我参比”模型 (一次获得所有时期的结果)
相邻	前沿交叉	$\text{Efficiency}(t-1) = E^{t-1}(x^t, y^t)$ 将面板数据转换为截面数据, 然后通过群组“下方邻群参比”模型 (一次获得所有时期的结果) $\text{Efficiency}(t+1) = E^{t+1}(x^t, y^t)$ 将面板数据转换为截面数据, 然后通过群组“上方邻群参比”模型 (一次获得所有时期的结果)
	联合前沿	$\text{Efficiency}(t-1) = E^{(t-1) \cup t}(x^t, y^t)$ (1) 通过 Window 模型, 将窗口宽度设为 2 (一次获得所有时期的结果) <sup>②</sup> (2) 将面板数据转换为截面数据, 然后通过群组“窗口参比”模型, 将窗口宽度设为 2, 偏移量设为 0 (一次获得所有时期的结果) $\text{Efficiency}(t+1) = E^{t \cup (t+1)}(x^t, y^t)$ (1) 通过 Window 模型, 将窗口宽度设为 2 (一次获得所有时期的结果) <sup>③</sup> (2) 将面板数据转换为截面数据, 然后通过群组“窗口参比”模型, 将窗口宽度设为 2, 偏移量设为 1 (一次获得所有时期的结果)
固定	—	$\text{Efficiency\_Fixed}(t) = E^f(x^t, y^t)$ (1) 将面板数据转换为截面数据, 然后通过群组“交叉参比”模型, 其中参考集为 $f$ 的结果 (一次获得所有时期的结果) (2) 将面板数据转换为截面数据, 然后通过自定义参考集为时期 $f$ (一次获得所有时期的结果)
全局	—	$\text{Efficiency\_Global}(t) = E^g(x^t, y^t)$ 通过 Window 模型, 将窗口宽度设为最大 $p$ (一次获得所有时期的结果)
序列参比共同结果		$\text{Efficiency}(t) = E^{(t)}(x^t, y^t)$ (1) 将面板数据转换为截面数据, 然后通过群组“向下参比”模型 (一次获得所有时期的结果) (2) 将面板数据转换为截面数据, 然后通过群组“窗口参比”模型, 将窗口宽度设为最大 $p$ , 偏移量设为 0 (一次获得所有时期的结果)

① 所有中间结果均可通过自定义被评价集和参考集来获得, 但是在多数情况下, 可以通过窗口模型或群组参比模型获得, 这样更简单。

② 除两端的时期外, 每个时期有两个对应的窗口, 注意本结果在由  $t-1$  和  $t$  构成的窗口中。

③ 除两端的时期外, 每个时期有两个对应的窗口, 注意本结果在由  $t$  和  $t+1$  构成的窗口中。

续表

模型类型		获取中间详细结果的方法
序列	前沿交叉	$\text{Efficiency}(t-1) = E^{s(t-1)}(x^t, y^t)$ <p>将面板数据转换为截面数据, 然后通过自定义被评价集和参考集 (一次获得一个时期的结果)</p> $\text{Efficiency}(t+1) = E^{s(t+1)}(x^t, y^t)$ <p>将面板数据转换为截面数据, 然后通过自定义被评价集和参考集 (一次获得一个时期的结果)</p>
	联合前沿	$\text{Efficiency}(t-1) = E^{s(t)}(x^t, y^t): \text{与 } \text{Efficiency}(t) \text{ 等价}$ $\text{Efficiency}(t+1) = E^{s(t+1)}(x^t, y^t)$ <p>将面板数据转换为截面数据, 然后通过自定义被评价集和参考集 (一次获得一个时期的结果)</p>
窗口参比共同结果		$\text{Efficiency}(t) = E^{w(t)}(x^t, y^t)$ <p>将面板数据转换为截面数据, 然后通过群组“窗口参比”模型, 窗口宽度 = Malmquist 窗口宽度, 偏移量 = Malmquist 窗口偏移量 (一次获得所有时期的结果)</p>
窗口	前沿交叉	$\text{Efficiency}(t-1) = E^{w(t-1)}(x^t, y^t)$ <p>(1) 如果 Malmquist 窗口偏移量 = 0, 将面板数据转换为截面数据, 然后自定义被评价集和参考集 (一次获得一个时期的结果)</p> <p>(2) 如果 Malmquist 窗口偏移量 &gt; 0, 将面板数据转换为截面数据, 然后通过群组“窗口参比”模型, 窗口宽度 = Malmquist 窗口宽度, 偏移量 = Malmquist 窗口偏移量 - 1 (一次获得所有时期的结果)</p> $\text{Efficiency}(t+1) = E^{w(t+1)}(x^t, y^t)$ <p>(1) 如果 Malmquist 窗口偏移量 &lt; 窗口宽度 - 1, 将面板数据转换为截面数据, 然后通过群组“窗口参比”模型, 窗口宽度 = Malmquist 窗口宽度, 偏移量 = Malmquist 窗口偏移量 + 1 (一次获得所有时期的结果)</p> <p>(2) 如果 Malmquist 窗口偏移量 = 窗口宽度 - 1: 将面板数据转换为截面数据, 然后自定义被评价集和参考集 (一次获得一个时期的结果)</p>
	联合前沿	$\text{Efficiency}(t-1) = E^{w(t-1) \cup w(t)}(x^t, y^t)$ <p>(1) 如果 Malmquist 窗口宽度 &lt; p, 将面板数据转换为截面数据, 然后通过群组“窗口参比”模型, 窗口宽度 = Malmquist 窗口宽度 + 1, 偏移量 = Malmquist 窗口偏移量 (一次获得所有时期的结果)</p> <p>(2) 如果 Malmquist 窗口宽度 = p, 将面板数据转换为截面数据, 然后通过自定义被评价集和参考集 (一次获得一个时期的结果)</p> $\text{Efficiency}(t+1) = E^{w(t) \cup w(t+1)}(x^t, y^t)$ <p>(1) 如果 Malmquist 窗口宽度 &lt; p 并且 Malmquist 窗口偏移量 &lt; 窗口宽度 - 1, 将面板数据转换为截面数据, 然后通过群组“窗口参比”模型, 窗口宽度 = Malmquist 窗口宽度 + 1, 偏移量 = Malmquist 窗口偏移量 + 1 (一次获得所有时期的结果)</p> <p>(2) 如果 Malmquist 窗口宽度 = p 或者 Malmquist 窗口偏移量 = 窗口宽度 - 1: 将面板数据转换为截面数据, 然后通过自定义参考集 (一次获得一个时期的结果)</p>
固定		$\text{Efficiency\_Fixed}(t) = E^{w(f)}(x^t, y^t)$ <p>将面板数据转换为截面数据, 然后通过自定义参考集 (一次获得所有时期的结果)</p>

面板数据转换为截面数据方法：将 DMU 名称和表示时间的变量合并为 DMU 名称，即 DMU 名称中包含时期。例如，将表 8-5 转换为表 8-6 或表 8-7。

表 8-5 转换前的面板数据

Period	DMU	Input	Output
9	A	4323	93608
9	B	6644	201354
9	C	7459	114022
10	A	4341	93656
10	B	6689	201442
10	C	7559	114107

表 8-6 转换后的截面数据 1

Period	DMU	Input	Output
9	A09	4323	93608
9	B09	6644	201354
9	C09	7459	114022
10	A10	4341	93656
10	B10	6689	201442
10	C10	7559	114107

表 8-7 转换后的截面数据 2

Period	DMU	Input	Output
9	09A	4323	93608
9	09B	6644	201354
9	09C	7459	114022
10	10A	4341	93656
10	10B	6689	201442
10	10C	7559	114107

在建立群组参比模型时，在导入转换后的数据时，将 Period 变量设置为“Cluster”。

## 8.5 Malmquist 指数的分解

MaxDEA 软件可以得出对 Malmquist 指数的各种分解方法。在 RTS 界面选择“Scale Efficiency or Scale Effect”，软件会分别计算 CRS Malmquist 模型和 VRS Malmquist 模型，并提供两个模型得出的结果指标的比值，作为 Malmquist 指数及其分解项的规模效应（Scale Effect）。

在 MaxDEA 输出的结果中，这些结果指标的名称分别为 Scale Effect on Efficiency Change (*SEEC*)、Scale Effect on Technological Change (*SETC*)、Scale Effect on Malmquist Index (*SEMI*)。

$$(1) SEEC = EC(CRS) / EC(VRS)$$

$$(2) SETC = TC(CRS) / TC(VRS)$$

$$(3) SEMI = MI(CRS) / MI(VRS)$$

三者之间的关系为  $SEMI = SEEC * SETC$

如果 Malmquist 模型采用的是径向距离，则 *SEEC* 就是规模效率变化 (Scale Efficiency Change, *SEC*)。

可以通过菜单 “Tools - Browse Results”，查看 CRS Malmquist 模型和 VRS Malmquist 模型的详细结果。

在这些详细结果及上述结果指标之间存在以下关系：

$$(1) MI(CRS) = EC(CRS) * TC(CRS)$$

这一分解方式就是文献中经常采用的

Malmquist 指数 (*MI*) = 技术效率变化 (*EC*) \* 技术变化 (*TC*)

$$(2) MI(VRS) = EC(VRS) * TC(VRS)$$

$$(3) MI(CRS) = EC(VRS) * SEEC * TC(CRS)$$

如果采用的是径向距离，这一分解方式就是文献中经常采用的

Malmquist 指数 (*MI*) = 纯技术效率变化 (*PEC*) \* 规模效率变化 (*SEC*) \* 技术变化 (*TC*)

### 8.5.1 Färe R 等人 (1992) 的分解方法

Färe R 等人 (1992) 将采用 CRS 径向 DEA 模型得出的 Malmquist 指数分解为技术效率变化和技术变化 (见图 8-6)。

$$MI = EC * TC$$

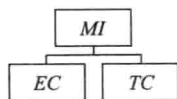


图 8-6 Färe R (1992) 的分解方法

在 MaxDEA 软件中采用径向距离，并将 RTS 设置为 “Constant (CRS)”，输出的结果即为这种分解方式。

### 8.5.2 Färe R 等人 (1994) 的分解方法

Färe R 等人 (1994) 在 Färe R 等人 (1992) 分解方法的基础上，通过 VRS Malmquist 和 CRS Malmquist 得出的不同的效率变化值，将 Färe R 等人 (1992) 分解方法中的 *EC* 进一步分解为纯技术效率变化和规模效率变化 (见图 8-7)，即

$$MI = EC * TC = PEC * SEC * TC$$

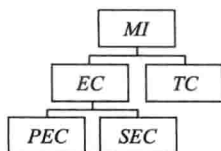


图 8-7 Färe R (1994) 的分解方法

在 MaxDEA 软件中选择径向距离, 并将 RTS 设置为 “Scale Efficiency or Scale Effect”, 输出结果中的 Scale Effect on Efficiency Change (*SEEC*) 就是规模效率变化 (*SEC*)。另外通过菜单 “Tools - Browse Results”, 在 CRS Malmquist 详细结果中的 Malmquist Index 就是这种分解方法中的 Malmquist 指数 (*MI*), Technological Change 就是技术变化 (*TC*); 在 VRS Malmquist 详细结果中的 Efficiency Change 就是纯效率变化 (*PEC*), 即

$$MI (CRS) = EC (VRS) * SEEC * TC (CRS)$$

### 8.5.3 Ray S C 和 Desli (1997) 的分解方法

Ray S C 和 Desli (1997) 将 CRS 模型得出的 Malmquist 指数分解为纯效率变化、纯技术变化和规模变化因子 (见图 8-8), 即

$$MI = PEC * PTC * SCH$$

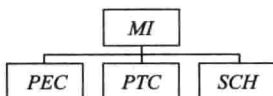


图 8-8 Ray S C 和 Desli 的分解方法

在 MaxDEA 软件中选择径向距离, 并将 RTS 设置为 “Scale Efficiency or Scale Effect”, 输出结果中的 Scale Effect on Malmquist Index (*SEMI*) 就是这种分解方法中的规模变化因子 (*SCH*)。另外通过菜单 “Tools - Browse Results”, 在 CRS Malmquist 详细结果中的 Malmquist Index 就是这种分解方法中的 Malmquist 指数 (*MI*); 在 VRS Malmquist 详细结果中的 Efficiency Change 就是纯效率变化 (*PEC*), Technological Change 就是纯技术变化 (*PTC*), 即

$$MI (CRS) = EC (VRS) * TC (VRS) * SEMI$$

### 8.5.4 Zofio (2007) 的分解方法

Zofio (2007) 的分解方法可以看做在 Färe R 等人 (1994) 分解方法的基础上, 将 *TC* 进一步分解为纯技术变化和规模技术变化 (见图 8-9), 即

$$MI = PEC * SEC * TC = PEC * SEC * PTC * STC$$

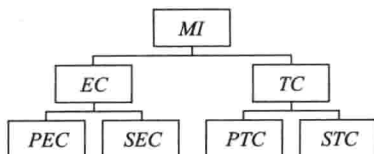


图 8-9 Zofio 的分解方法

在 MaxDEA 软件中选择径向距离，并将 RTS 设置为“Scale Efficiency or Scale Effect”，输出结果中的 Scale Effect on Efficiency Change (*SEEC*) 就是规模效率变化 (*SEC*)，Scale Effect on Technological Change (*SETC*) 就是规模技术变化 (*STC*)。另外通过菜单“Tools - Browse Results”，在 CRS Malmquist 详细结果中的 Malmquist Index 就是这种分解方法中的 Malmquist 指数 (*MI*)；在 VRS Malmquist 详细结果中的 Efficiency Change 就是纯效率变化 (*PEC*)，Technological Change 就是纯技术变化 (*PTC*) 即

$$MI (CRS) = EC (VRS) * TC (VRS) * SEEC * SETC$$

## 8.6 几种常用的 Malmquist 组合模型

在 MaxDEA 软件中，Malmquist 模型可以与前面介绍的所有 DEA 模型进行组合应用，在此介绍几种常用的组合模型。组合应用的方法就是在 MaxDEA 软件的相应界面把相关的选项都选上即可，如成本 Malmquist 指数就是选择成本距离和 Malmquist 模型，Malmquist - Luenberger 指数就是选择非期望产出模型和 Malmquist 模型。

### 8.6.1 Malmquist - Luenberger 指数

Chung 等人 (1997) 将包含坏产出的方向距离函数应用于 Malmquist 模型，并将得出的 Malmquist 指数称为 Malmquist - Luenberger 生产率指数。任何包含坏产出的 Malmquist 模型得出的 Malmquist 指数都可以称为 Malmquist - Luenberger 指数。也就是说在 MaxDEA 软件中将坏产出模型与 Malmquist 模型组合，得出的就是 Malmquist - Luenberger 指数。Chung 等人 (1997) 采用的是方向距离函数和相邻前沿交叉参比 Malmquist 模型，而在 MaxDEA 软件中，可以选择其他任何距离函数，如径向、SBM、MinDS 等，与 Malmquist 模型进行组合应用。Malmquist 指数也可以选择其他类型，如全局参比等。

### 8.6.2 成本 - Malmquist 指数

Maniadiakis 和 Thanassoulis (2004) 将成本模型与 Malmquist 指数组合应用，得出成本 - Malmquist 指数。在 MaxDEA 软件中，还可以将收益模型等与 Malmquist 指数组合应用，得出收益 - Malmquist 指数等指标。Malmquist 指数也可以选择其他类型，如全局参比等。

成本 Malmquist 模型的分解分为两步，MaxDEA 软件直接提供了第一步的分解结果。

第一步：运行成本效率 Malmquist 模型，并选择 RTS = Scale Efficiency or Scale Effect，在结果中有

Malmquist Index (指成本 Malmquist 指数) = Efficiency Change (指成本效率变化) \* Technological Change (指综合技术变化)

第二步，运行径向 Malmquist 模型，然后利用两步的结果进行以下分解：

• Allocative Efficiency Change (配置效率变化) = Efficiency Change (来自成本 Malmquist 模型) / Efficiency Change (来自径向 Malmquist 模型)

• Price Effect (价格效应) = Technological Change (来自成本 Malmquist 模型) / Technological Change (来自径向 Malmquist 模型)

成本 Malmquist Index 的总分解为

• 成本 Malmquist Index = Efficiency Change (技术效率变化) \* Allocative Efficiency Change (配置效率变化) \* Technological Change (技术变化) \* Price Effect (价格效应)

### 8.6.3 Metafrontier - Malmquist 模型

Oh 和 Lee (2010) 将 Metafrontier 的方法应用于全局参比 Malmquist 模型并对 MetaFrontier Malmquist 进行分解。Oh 和 Lee (2010) 将所有 DMU 按照某种属性进行分组, 然后分别计算各组内部的全局 Malmquist 指数和不分组整体的全局 Malmquist 指数。

(1) 各组内部的全局 Malmquist 指数及其分解。

$$\begin{aligned} M_g^{\text{组内}}(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t) &= \frac{E^{\text{组内}g}(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^{\text{组内}g}(x^t, y^t)} \\ &= \frac{E^{\text{组内}t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^{\text{组内}t}(x^t, y^t)} \left( \frac{\frac{E^{\text{组内}g}(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^{\text{组内}t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}}{\frac{E^{\text{组内}g}(x^t, y^t)}{E^{\text{组内}t}(x^t, y^t)}} \right) \\ &= \frac{TE^{\text{组内}t+1}}{TE^{\text{组内}t}} \left( \frac{BPG^{\text{组内}t+1}}{BPG^{\text{组内}t}} \right) \\ &= EC \times BPC \end{aligned}$$

$BPG$  (Best Practice Gap) 是指各组内部当期前沿与全局前沿之间的差距;  
 $BPC$  (Best Practice Change) 是指由  $t$  期到  $t+1$  期  $BPG$  发生的变化。

(2) 计算不分组整体的全局 Malmquist 指数并在上步基础上进一步分解。

$$\begin{aligned} M_g(x^{t+1}, y^{t+1}, x^t, y^t) &= \frac{E^g(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^g(x^t, y^t)} \\ &= \frac{E^{\text{组内}t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^{\text{组内}t}(x^t, y^t)} \left( \frac{\frac{E^g(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^{\text{组内}t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}}{\frac{E^g(x^t, y^t)}{E^{\text{组内}t}(x^t, y^t)}} \right) \\ &= \frac{TE^{\text{组内}t+1}}{TE^{\text{组内}t}} \left( \frac{\frac{E^{\text{组内}g}(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^{\text{组内}t+1}(x^{t+1}, y^{t+1})}}{\frac{E^{\text{组内}g}(x^t, y^t)}{E^{\text{组内}t}(x^t, y^t)}} \right) \left( \frac{\frac{E^g(x^{t+1}, y^{t+1})}{E^{\text{组内}g}(x^{t+1}, y^{t+1})}}{\frac{E^g(x^t, y^t)}{E^{\text{组内}g}(x^t, y^t)}} \right) \\ &= \frac{TE^{\text{组内}t+1}}{TE^{\text{组内}t}} \left( \frac{BPG^{\text{组内}t+1}}{BPG^{\text{组内}t}} \right) \left( \frac{TGR^{t+1}}{TGR^t} \right) \\ &= EC \times BPC \times TGC \end{aligned}$$

$TGR$  (Technology Gap Ratio, 技术缺口比率) 是指各组前沿与共同前沿之间的差距;  $TGC$  (Technology Gap Change) 是指由  $t$  期到  $t+1$  期  $TGR$  发生的变化。

MaxDEA 软件没有直接提供上述结果, 但是可以按照以下步骤计算上述 Metafrontier Malmquist 指数及其分解, 这需要在数据中增加一个分组变量, 并在导入数据时定义为 “Cluster”, 然后依次求解。

(1) MetaFrontier Malmquist = 不分组的全局 Malmquist 指数;

(2)  $EC$  = 组内模型得出的效率变化, 即联合应用全局 Malmquist 模型和群组 “自我参比” 模型得出的  $EC$ <sup>①</sup>;

(3)  $BPC$  = 组内全局 Malmquist 模型得出的 “Technological Change” ( $TC$ ), 即联合应用全局 Malmquist 模型和群组 “自我参比” 模型得出的  $TC$ ;

(4)  $TGC = \text{MetaFrontier Malmquist} / EC / BPC$ 。

---

① 相邻、固定、全局 Malmquist 模型得出的  $EC$  是相同的, 因此, 这一步可以使用 (相邻、固定或全局 Malmquist + 群组自我参比模型), 结果是相同的。



# 附 录

## 附 1 本书未介绍的 MaxDEA 包含的模型

- (1) 交叉效率模型 (Cross Efficiency Model)。
- (2) 网络 DEA 模型 (Network DEA)。
- (3) 并行模型 (Parallel Model)。
- (4) 动态 DEA 模型 (Dynamic DEA)。
- (5) 固定标杆模型 (Fixed Benchmark Model)。
- (6) Context Dependent 模型。
- (7) DEA Bootstrapping。
- (8) Malmquist Bootstrapping。

## 附 2 MaxDEA 的一些使用技巧

- (1) 如何计算只有投入或只有产出的 VRS DEA 模型。

如果模型只有投入, 没有产出, 可以增加一个产出变量, 并将变量值全部设置为 1; 如果模型只有产出, 没有投入, 可以增加一个投入变量, 并将变量值全部设置为 1。

- (2) 如何计算相加模型 (Additive Model)。

MaxDEA 没有提供相加模型 (相加模型只能做投影分析, 而没有效率值), 但是可以通过方向距离函数间接获得相加模型的结果, 方法如下:

- 1) 选择方向距离函数, 并通过自定义方向向量将各投入产出指标的方向向量值均设为 0, 即方向向量 =  $(0, 0, \dots, 0)$ ;

- 2) 选择非导向;

- 3) 在 Options 界面将松弛变量计算方法设置为两阶段方法。

输出的结果即为相加模型的结果, 在结果中忽略 Score, beta 等效率值相关结果指标。

- (3) 面板数据的群组模型中, 如何处理同一个 DMU 不同时间分属不同群组的问题。

在面板数据中, 同一个 DMU 在不同的时期, 必须属于同一个群组, 否则软件会提示错误。当一个 DMU 在不同时期分属不同的群组时, 该 DMU 可以在不同

群组内采用不同的名称。例如共有 1、2、3、4 四个群组，DMU A 在四个群组内的名称可以采用 A\_1、A\_2、A\_3 和 A\_4。这样就可以解决同一 DMU 属于不同群组的问题了。

#### (4) 如何计算 SORM 模型。

SORM 模型是 Emrouznejad 等人 (2010) 提出的一种处理负数指标的方法。由于 SORM 模型仍然存在径向改进错误的问题 (Cheng, et al., 2013)，MaxDEA 软件中没有提供这一方法。但是可以通过方向距离函数间接实现 SORM 模型的计算。

##### 1) 将包含负数的指标分离正负数之后的负数指标保留负数不变，即

$$v_{ij}^1 = \begin{cases} v_{ij} & \text{if } v_{ij} \geq 0 \\ 0 & \text{if } v_{ij} < 0 \end{cases} \text{ 和 } v_{ij}^2 = \begin{cases} 0 & \text{if } v_{ij} \geq 0 \\ v_{ij} & \text{if } v_{ij} < 0 \end{cases};$$

##### 2) 将所有指标复制作为方向向量使用；

3) 选择方向距离函数，方向向量类型选择 Customized (DMU specific)，将各指标的方向向量指定为其自身 (复制的变量)；

4) 投入导向 SORM 模型的效率值为  $1 - \alpha^*$ ；产出导向 SORM 模型的效率值为  $1 / (1 + \beta)^*$ 。如果被评价 DMU 的所有指标数据中均没有 0，则计算得出的效率值与 MaxDEA 提供的效率值 (Score) 相等。

(5) 如何实现在 SBM 模型中将坏产出固定，并且在目标函数中不包含坏产出。

1) 在 SBM 模型中将坏产出固定的方法：在 Advanced Models (1) 界面，勾选 Non - discretionary Inputs/Outputs，并设置坏产出的 Degree of Discretion = 0%，这样该指标的松弛变量被限制为等于 0，其目标值固定为原始值。

2) 在目标函数中不包含坏产出的方法：在 Advanced Models (1) 界面，勾选 Preference (Weighted)，并将该坏产出的权重设为 0，从而使得该指标不计入目标函数。

这样设置后的 SBM 模型为：

$$\min \rho = \frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_i^- / x_{ik}}{1 + \frac{1}{q_1} \sum_{r=1}^{q_1} s_r^+ / y_{rk}}$$

$$\text{s. t. } X\lambda + s^- = x_k$$

$$Y\lambda - s^+ = y_k$$

$$B\lambda = b_k$$

$$\lambda, s^-, s^+ \geq 0$$

### 附 3 MaxDEA 软件版本更新及功能

版本	功能
1.0 (2009.4 ~ 2009.5)	<ul style="list-style-type: none"> <li>按照距离函数划分, 包括传统的径向 (Radial) DEA 模型、非径向 (Non-radial) 的 SBM 模型及径向和 SBM 混合 (Hybrid) 的模型</li> <li>按照模型导向 (Orientation) 是投入最小化还是产出最大化, 分为投入导向 (Input-oriented)、产出导向 (Output-oriented) 和非导向 (Non-oriented) 模型</li> <li>按照规模收益类型划分, 包括规模收益不变 (Constant Returns to Scale, CRS)、可变 (Variable Returns to Scale, VRS)、非增 (Non-Increasing Returns to Scale, NIRS)、非减 (Non-Decreasing Returns to Scale, NIRS) 和一般化 (Generalized Returns to Scale, GRS) 模型</li> <li>除此之外, 还包括 FDH (Free Disposal Hull) 模型、超效率模型、投入 (产出) 不可控模型、投入 (产出) 边界模型、偏好 (加权) SBM 模型及 Malmquist 模型, 并且以上所有模型可以进行组合应用</li> </ul>
2.0 ~ 2.7 (2009.6 ~ 2009.9)	<ul style="list-style-type: none"> <li>成本效率 (Cost Efficiency), 收益效率 (Revenue Efficiency), 利润效率 (Profit Efficiency) 和收益成本比效率 (Revenue/Cost Ratio Efficiency)</li> <li>包含坏产出 (Undesirable Output, Bad Outputs) 的模型</li> <li>在乘数形式 (Multiplier Model) 的 DEA 模型中增加了 Malmquist 模型</li> <li>自定义参比的 DEA 模型 (Customized Benchmarking Model Including Variable-Benchmark and Fixed-Benchmark)</li> <li>网络 DEA 模型</li> <li>在乘数形式的 DEA 模型中, 增加了两阶段计算权重的方法, 即利他和压他两种方法</li> <li>交叉效率模型</li> </ul>
3.0 ~ 3.2 (2009.10 ~ 2009.12)	<ul style="list-style-type: none"> <li>群组 (Cluster) 模型, 可以将所有 DMU 按照属性进行分组, 然后可进行自我参比 (Self-Benchmarking)、交叉参比 (Cross-Benchmarking), 向下参比 (Downward-Benchmarking), 向上参比 (Upward-Benchmarking)</li> <li>窗口 (window) 模型</li> </ul>
4.0 ~ 4.4 (2010.1 ~ 2010.8)	<ul style="list-style-type: none"> <li>新增了 5 种模型导向 (Orientation) 类型</li> <li>输出 DEA 模型的线性规划式</li> <li>动态 (Dynamic) DEA 模型</li> </ul>
5.0 ~ 5.2 (2010.9 ~ 2013.6)	<ul style="list-style-type: none"> <li>方向距离函数 (Directional Distance Function) 模型</li> <li>新增两种 Malmquist 模型, 固定参比 (Adjacent Malmquist) 和全局参比 (Global Malmquist)</li> <li>增加了采用加减取算术平均的方法计算 TFP 指数 (即 Luenberger 指数)</li> <li>新增 DEA 模型的对偶解及其敏感性分析</li> </ul>
6.0 ~ 6.2 (2013.7 ~ )	<ul style="list-style-type: none"> <li>DEA 和 Malmquist 模型的 Bootstrap 方法</li> <li>Malmquist 模型支持非平衡面板数据</li> <li>更多的 TFP 指数 (Malmquist 指数) 计算方法           <ul style="list-style-type: none"> <li>☆ 相邻参比 (Adjacent Malmquist)</li> <li>☆ 固定参比 (Fixed Malmquist)</li> <li>☆ 全局参比 (Global Malmquist)</li> <li>☆ 序列参比 (Sequential-Malmquist, 6.0 版新增)</li> <li>☆ 窗口参比 (Window-Malmquist, 6.0 版新增)</li> </ul> </li> </ul>

续表

版本	功能
6.0 ~ 6.2 (2013.7 ~ )	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 更多的距离函数类型 <ul style="list-style-type: none"> <li>☆ 径向 (Radial)</li> <li>☆ 至前沿最远距离 (Maximum Distance to Frontier, 非径向 SBM)</li> <li>☆ 径向与 SBM 混合距离 (Hybrid)</li> <li>☆ 至弱有效前沿最近距离 (Minimum Distance to Weak Efficient Frontier, 6.0 版新增)</li> <li>☆ 至强有效前沿最近距离 (Minimum Distance to Strong Efficient Frontier, 6.0 版新增)</li> <li>☆ 径向与 SBM 混合距离 (EBM Model, 6.0 版新增)</li> <li>☆ 方向向量扫描模型 (Direction Vector Scanning Model, 6.0 版新增)</li> <li>☆ RDM (Range Directional Model, 6.0 版新增)</li> <li>☆ MSBM 模型 (Modified SBM, 6.0 版新增)</li> </ul> </li> <li>• 在网络 DEA 模型中, 更多的中间产出类型 <ul style="list-style-type: none"> <li>☆ 自由 (Free)</li> <li>☆ 固定 (Fixed)</li> <li>☆ 非增 (Non - increasing, 6.0 版新增)</li> <li>☆ 非减 (Non - decreasing, 6.0 版新增)</li> </ul> </li> <li>• 更多的群组参比类型 (Cluster) <ul style="list-style-type: none"> <li>☆ 自我参比 (Self - benchmarking)</li> <li>☆ 交叉参比 (Cross - benchmarking)</li> <li>☆ 向下参比 (Downward - benchmarking)</li> <li>☆ 向上参比 (Upward - benchmarking)</li> <li>☆ 下方邻群参比 (Lower - adjacent - benchmarking, 6.0 版新增)</li> <li>☆ 上方邻群参比 (Upper - adjacent - benchmarking, 6.0 版新增)</li> <li>☆ 窗口参比 (Window - benchmarking, 6.0 版新增)</li> </ul> </li> <li>• 可以在动态 (Dynamic) DEA 模型中设置各期的权重</li> <li>• 并行 DEA 模型 (Parallel Network Model)</li> <li>• Context - dependent Model</li> <li>• 规模弹性 (Scale Elasticity, Degree of Scale Economy)</li> <li>• 投影约束模型 (Restricted Projection SBM)</li> </ul>

## 参考文献

- [1] Ali A I, Seiford L M. Computational accuracy and infinitesimals in data envelopment analysis [J]. *Infor*, 1993 (31): 290 – 297.
- [2] Amirteimoori A, Kordrostami S. Generating strong defining hyperplanes of the production possibility set in data envelopment analysis [J]. *Applied Mathematics Letters*, 2012 (25): 605 – 609.
- [3] Andersen P, Petersen N C. A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis [J]. *Management Science*, 1993 (39): 1261 – 1265.
- [4] Aparicio J, Ruiz J L, Sirvent I. Closest targets and minimum distance to the Pareto – efficient frontier in DEA [J]. *Journal of Productivity Analysis*, 2007 (28): 209 – 218.
- [5] Asmild M, Paradi J C, Aggarwall V, Schaffnit C. Combining DEA window analysis with the Malmquist index approach in a study of the Canadian banking industry [J]. *Journal of Productivity Analysis*, 2004 (21): 67 – 89.
- [6] Bal H, Örkücü H H, Çelebioglu S. Improving the discrimination power and weights dispersion in the data envelopment analysis [J]. *Computers & Operations Research*, 2010 (37): 99 – 107.
- [7] Banker R D, Chang H. The super – efficiency procedure for outlier identification, not for ranking efficient units [J]. *European Journal of Operational Research*, 2006 (175): 1311 – 1320.
- [8] Banker R D, Charnes A, Cooper W W. Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis [J]. *Management Science*, 1984 (30): 1078 – 1092.
- [9] Banker R D, Morey R C. Efficiency analysis for exogenously fixed inputs and outputs [J]. *Operations Research*, 1986 (34): 513 – 521.
- [10] Banker R D, Thrall R M. Estimation of Returns to Scale Using Data Envelopment Analysis [J]. *European Journal of Operational Research*, 1992 (62): 74 – 84.
- [11] Berg S A, Forsund F R, Jansen E S. Malmquist Indexes of Productivity Growth during the Deregulation of Norwegian Banking, 1980 – 1989 [J]. *Scandinavian Journal of Economics*, 1992 (94): S211 – S228.
- [12] Boljuncic V. Sensitivity analysis of an efficient DMU in DEA model with variable returns to scale (VRS) [J]. *Journal of Productivity Analysis*, 2006 (25): 173 – 192.
- [13] Briec W. Holder distance function and measurement of technical efficiency [J]. *Journal of Productivity Analysis*, 1999 (11): 111 – 131.
- [14] Caves D W, Christensen L R, Diewert W E. The economic – theory of index numbers and the measurement of input, output, and productivity [J]. *Econometrica*, 1982 (50): 1393 – 1414.
- [15] Chambers R G, Färe R, Grosskopf S. Productivity growth in APEC countries [J]. *Pacific Economic Review*, 1996 (1): 181 – 190.
- [16] Charnes A, Clark C T, Cooper W W, Golany B. A developmental study of data envelopment

- analysis in measuring the efficiency of maintenance units in the US air forces [J]. *Annals of Operations Research*, 1985 (2): 95 – 112.
- [17] Charnes A, Cooper W W, Rhodes E. Measuring the efficiency of decision making units [J]. *European Journal of Operational Research*, 1978 (2): 429 – 444.
- [18] Charnes A, Roussea J J, Semple J H. Sensitivity and stability of efficiency classifications in data envelopment analysis [J]. *Journal of Productivity Analysis*, 1996 (7): 5 – 18.
- [19] Chen C M. A critique of non – parametric efficiency analysis in energy economics studies [J]. *Energy Economics*, 2013 (38): 146 – 152.
- [20] Chen J – X, Deng M, Gingras S. A modified super – efficiency measure based on simultaneous input – output projection in data envelopment analysis [J]. *Computers & Operations Research*, 2011 (38): 496 – 504.
- [21] Chen Y. Ranking efficient units in DEA [J]. *Omega*, 2004 (32): 213 – 219.
- [22] Chen Y, Liang L. Super – efficiency DEA in the presence of infeasibility: One model approach [J]. *European Journal of Operational Research*, 2011 (213): 359 – 360.
- [23] Cheng G, Zervopoulos P, Qian Z. A variant of radial measure capable of dealing with negative inputs and outputs in data envelopment analysis [J]. *European Journal of Operational Research*, 2013 (225): 100 – 105.
- [24] Cheng G, Zervopoulos P D. Estimating the technical efficiency of health care systems: a cross – country comparison using the directional distance function [J]. *European Journal of Operational Research*, 2014 (238), 899 – 910.
- [25] Chung Y H, Färe R, Grosskopf S. Productivity and undesirable outputs: A directional distance function approach [J]. *Journal of Environmental Management*, 1997 (51): 229 – 240.
- [26] Coelli T J, Prasada Rao D S, O'Donnell C J, Battese G E. *Introduction to Efficiency and Productivity Analysis* [M]. 2nd ed. New York: Springer Science & Business Media, 2005.
- [27] Cook W D, Liang L, Zha Y, Zhu J. A modified super – efficiency DEA model for infeasibility [J]. *Journal of the Operational Research Society*, 2009 (60): 276 – 281.
- [28] Cook, W D, Seiford L M. Data envelopment analysis (DEA) – Thirty years on [J]. *European Journal of Operational Research*, 2009 (192): 1 – 17.
- [29] Cook W D, Seiford L M, Zhu J. Models for performance benchmarking: measuring the effect of e – business activities on banking performance [J]. *Omega*, 2004 (32): 313 – 322.
- [30] Cook W D, Zhu J. *Modeling Performance Measurement: Applications and Implementation Issues in DEA* [M]. New York: Springer Science & Business Media, 2005.
- [31] Cooper W W, Li S, Seiford L M, Tone K, Thrall R M, Zhu J. Sensitivity and stability analysis in DEA: Some recent developments [J]. *Journal of Productivity Analysis*, 2001 (15): 217 – 246.
- [32] Cooper W W, Seiford L M, Tone K. *Data envelopment analysis: a comprehensive text with models, applications, references and DEA – Solver software* [M]. 2nd ed. New York: Springer Science & Business Media, 2007.
- [33] Cooper W W, Seiford L M, Zhu J. *Handbook on Data Envelopment Analysis* [M]. New York: Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [34] Dyson R G, Thanassoulis E. Reducing Weight Flexibility in Data Envelopment Analysis [J].

- Journal of the Operational Research Society*, 1988 (39): 563 – 576.
- [35] Emrouznejad A, Amin G R. DEA models for ratio data: Convexity consideration [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2009 (33): 486 – 498.
- [36] Emrouznejad A, Anouze A L, Thanassoulis E. A semi – oriented radial measure for measuring the efficiency of decision making units with negative data, using DEA [J]. *European Journal of Operational Research*, 2010 (200): 297 – 304.
- [37] Emrouznejad A, Parker B R, Tavares G. Evaluation of research in efficiency and productivity: A survey and analysis of the first 30 years of scholarly literature in DEA [J]. *Socio – Economic Planning Sciences*, 2008 (42): 151 – 157.
- [38] Färe R, Grosskopf S. Nonparametric productivity analysis with undesirable outputs: Comment [J]. *American Journal of Agricultural Economics*, 2003 (85): 1070 – 1074.
- [39] Färe R, Grosskopf S, Lindgren B, Roos P. Productivity changes in Swedish pharmacies 1980—1989: A non – parametric Malmquist approach [J]. *Journal of Productivity Analysis*, 1992 (3): 85 – 101.
- [40] Färe R, Grosskopf S, Lovell C A K. The structure of technical efficiency [J]. *The Scandinavian journal of economics*, 1983 (85): 181 – 190.
- [41] Färe R, Grosskopf S, Lovell C A K. *The measurement of efficiency of production* [M]. Kluwer – Nijhoff Pub, 1985.
- [42] Färe R, Grosskopf S, Norris M, Zhang Z. Productivity Growth, Technical Progress, and Efficiency Change in Industrialized Countries [J]. *American Economic Review*, 1994 (84): 66 – 83.
- [43] Färe R, Knox Lovell C A. Measuring the technical efficiency of production [J]. *Journal of Economic Theory*, 1978 (19): 150 – 162.
- [44] Farrell M J. The measurement of productive efficiency [J]. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*, 1957 (120): 253 – 290
- [45] Forsund F R, Hjalmarsson L. Calculating scale elasticity in DEA models [J]. *Journal of the Operational Research Society*, 2004 (55): 1023 – 1038.
- [46] Fukuyama H. Returns to scale and scale elasticity in data envelopment analysis [J]. *European Journal of Operational Research*, 2000 (125): 93 – 112.
- [47] Grosskopf S. The Role of the Reference Technology in Measuring Productive Efficiency [J]. *Economic Journal*, 1986 (96): 499 – 513.
- [48] Hollingsworth B, Smith P. Use of ratios in data envelopment analysis [J]. *Applied Economics Letters*, 2003 (10): 733 – 735.
- [49] Jahanshahloo G R, Hosseinzadeh F, Shoja N, Sanei M, Tohidi G. Sensitivity and stability analysis in DEA [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2005 (169): 897 – 904.
- [50] Jahanshahloo G R, Lotfi F H, Rezaei H Z, Balf F R. Finding strong defining hyperplanes of production possibility set [J]. *European Journal of Operational Research*, 2007 (177): 42 – 54.
- [51] Jahanshahloo G R, Shirzadi A, Mirdehghan S M. Finding strong defining hyperplanes of PPS using multiplier form [J]. *European Journal of Operational Research*, 2009 (194): 933 – 938.
- [52] Lee H – S, Chu C – W, Zhu J. Super – efficiency DEA in the presence of infeasibility [J]. *European Journal of Operational Research*, 2011 (212): 141 – 147.

- [53] Lotfi F H, Jahanshahloo G R, Esmaeili M. Sensitivity analysis of efficient units in the presence of non – discretionary inputs [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2007 (190): 1185 – 1197.
- [54] Lotfi F H, Jahanshahloo G R, Mozaffari M R, Gerami J. Finding DEA – efficient hyperplanes using MOLP efficient faces [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2011 (235): 1227 – 1231.
- [55] Malmquist S. Index numbers and indifference surfaces [J]. *Trabajos de Estadística y de Investigación Operativa*, 1953 (4): 209 – 242.
- [56] Maniadakis N, Thanassoulis E. A cost Malmquist productivity index [J]. *European Journal of Operational Research*, 2004 (154): 396 – 409.
- [57] Oh D – h, Lee J – d. A metafrontier approach for measuring Malmquist productivity index [J]. *Empirical Economics*, 2010 (38): 47 – 64.
- [58] Olesen O B, Petersen N C. Identification and use of efficient faces and facets in DEA [J]. *Journal of Productivity Analysis*, 2003 (20): 323 – 360.
- [59] Pastor J T, Lovell C A K. A global Malmquist productivity index [J]. *Economics Letters*, 2005 (88): 266 – 271.
- [60] Portela M C A S, Thanassoulis E, Simpson G. Negative data in DEA: a directional distance approach applied to bank branches [J]. *Journal of the Operational Research Society*, 2004 (55): 1111 – 1121.
- [61] Rao D S P, Christopher J O D, George E B. Metafrontier Functions for the Study of Inter – regional Productivity Differences [D]. School of Economics, University of Queensland, Australia, 2003.
- [62] Ray S C. *Data Envelopment Analysis: Theory and Techniques for Economics and Operations Research* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [63] Ray S C. The directional distance function and measurement of super – efficiency: an application to airlines data [J]. *Journal of the Operational Research Society*, 2008 (59): 788 – 797.
- [64] Ray S C, Desli E. Productivity growth, technical progress, and efficiency change in industrialized countries: Comment [J]. *American Economic Review*, 1997 (87): 1033 – 1039.
- [65] Rezitis A N. Agricultural productivity and convergence: Europe and the United States [J]. *Applied Economics*, 2010 (42): 1029 – 1044.
- [66] Seiford L M. Data envelopment analysis: The evolution of the state of the art (1978—1995) [J]. *The Journal of Productivity Analysis*, 1996 (6): 99 – 137.
- [67] Seiford L M, Zhu J. Infeasibility of super – efficiency data envelopment analysis models [J]. *Infor*, 1999 (37): 174 – 187.
- [68] Sharp J A, Meng W, Liu W. A modified slacks – based measure model for data envelopment analysis with natural – negative outputs and inputs [J]. *Journal of the Operational Research Society*, 2007 (58): 1672 – 1677.
- [69] Shestalova V. Sequential Malmquist indices of productivity growth: An application to OECD industrial activities [J]. *Journal of Productivity Analysis*, 2003 (19): 211 – 226.
- [70] Sun C C. Assessing Taiwan financial holding companies’ performance using window analysis and Malmquist productivity index [J]. *African Journal of Business Management*, 2011 (5): 10508 – 10523.



- [71] Thompson R G, Langemeier L N, Lee C - T, Lee E, Thrall R M. The role of multiplier bounds in efficiency analysis with application to Kansas farming [J]. *Journal of Econometrics*, 1990 (46): 93 - 108.
- [72] Thompson R G, Singleton F D, Thrall R M, Smith B A. Comparative Site Evaluations for Locating a High - Energy Physics Lab in Texas [J]. *Interfaces*, 1986 (16): 35 - 49.
- [73] Tone K. A slacks - based measure of efficiency in data envelopment analysis [J]. *European Journal of Operational Research*, 2001 (130): 498 - 509.
- [74] Tone K. A slacks - based measure of super - efficiency in data envelopment analysis [J]. *European Journal of Operational Research*, 2001 (143): 32 - 41.
- [75] Tone K. Variations on the theme of slacks - based measure of efficiency in DEA [J]. *European Journal of Operational Research*, 2010 (200): 901 - 907.
- [76] Tone K, Sahoo B K. Degree of scale economies and congestion: A unified DEA approach [J]. *European Journal of Operational Research*, 2004 (158): 755 - 772.
- [77] Tone K, Tsutsui M. An epsilon - based measure of efficiency in DEA - A third pole of technical efficiency [J]. *European Journal of Operational Research*, 2010 (207): 1554 - 1563.
- [78] Tulkens H. On FDH efficiency analysis: Some methodological issues and applications to retail banking, courts, and urban transit [J]. *Journal of Productivity Analysis*, 1993 (4): 183 - 210.
- [79] Wilson P W. Detecting Influential Observations in Data Envelopment Analysis [J]. *Journal of Productivity Analysis*, 1995 (6): 27 - 45.
- [80] Wong Y H B, Beasley J E. Restricting Weight Flexibility in Data Envelopment Analysis [J]. *Journal of the Operational Research Society*, 1990 (41): 829 - 835.
- [81] Zhu J. Super - efficiency and DEA sensitivity analysis [J]. *European Journal of Operational Research*, 2001 (129): 443 - 455.
- [82] Zhu J. *Quantitative Models for Performance Evaluation and Benchmarking: DEA with Spreadsheets* [M]. 2nd ed. Boston: Springer, 2009.
- [83] Zofio J L. Malmquist productivity index decompositions: a unifying framework [J]. *Applied Economics*, 2007 (39): 2371 - 2387.
- [84] 成刚, 钱振华. 卫生体系效率评价的概念框架与测量方法——兼论应用数据包络分析的方法学问题 [J]. *中国卫生政策研究*, 2012 (5): 52 - 60.
- [85] 马占新. 一种基于样本前沿面的综合评价方法 [J]. *内蒙古大学学报 (自然科学版)*, 2002: 606 - 610.
- [86] 马占新, 马生昀. 基于  $C^2W$  模型的广义数据包络分析方法研究 [J]. *系统工程与电子技术*, 2009: 366 - 372.